OpenCurve

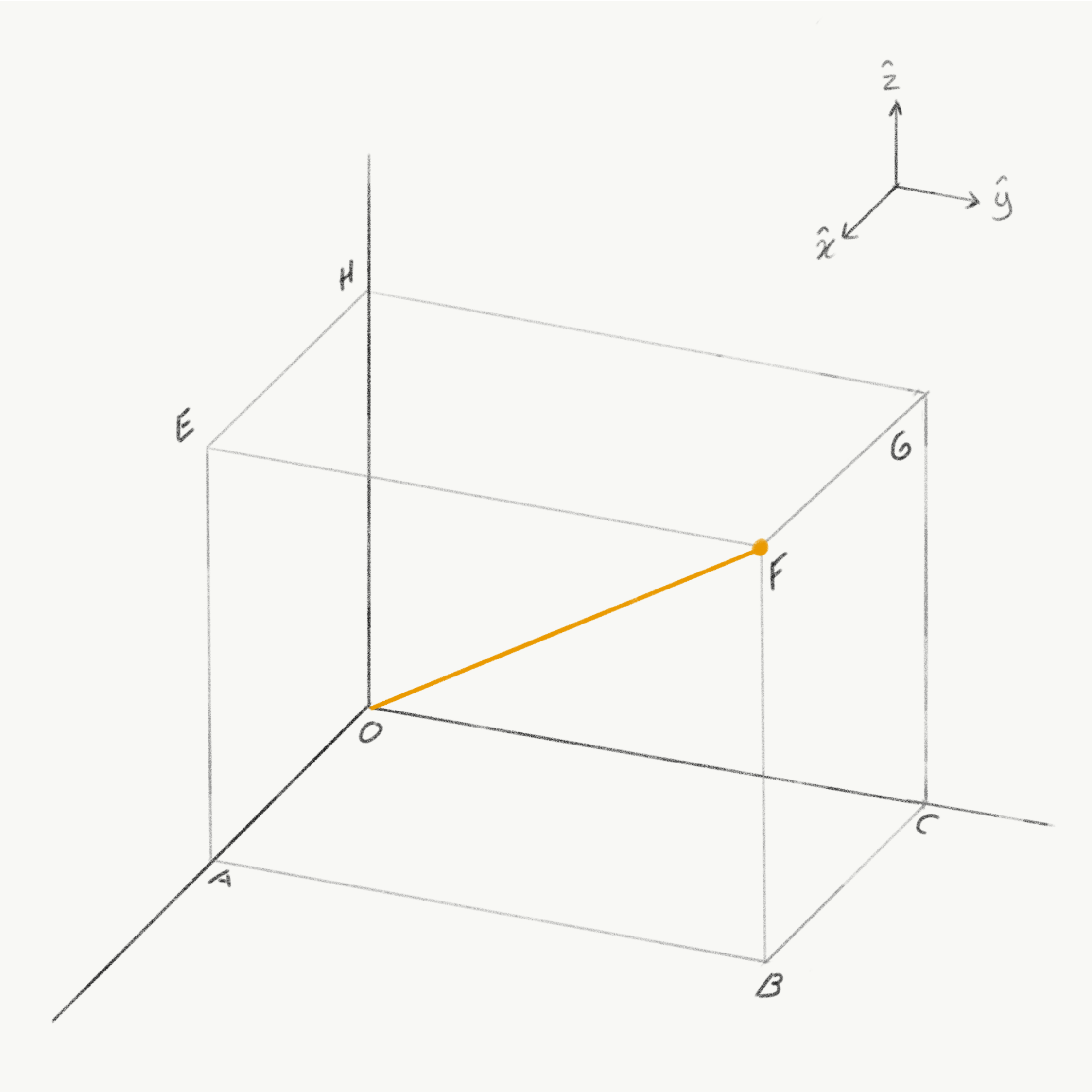
a bit of maths and physics. for everyone.

Wat is een ruimtetijdinterval?

by @kjrunia
2018-12-22

Einstein en collega's leerden ons dat ruimte en tijd geen gefixeerde entiteiten zijn. Ze kunnen worden uitgerekt en ingekort. Ze variëren. Er is echter een ding dat dit niet doet: de invariantie van de ruimtetijdinterval.

Inhoudsopgave



Figuur 1: Een foton reist van O naar F in een driedimensionale ruimte

1 Ruimtelijk interval

Stel, er wordt een foton afgevuurd van de oorsprong O en het verplaatst zich naar punt F, zoals afgebeeld in Figuur 1. Laten we de gekwadrateerde afstand die het foton aflegt, $d(O, F)^2$, relateren aan de andere afstanden met gebruikmaking van die goeie, ouwe stelling van Pythagoras:

$$d(O, F)^2 = d(O, A)^2 + d(A, B)^2 + d(B, F)^2.$$

We kunnen de vorige uitdrukking ook explicieter opschrijven in termen van de afstanden van de punten tot de oorsprong O:

$$\begin{aligned} F = (x, y, z), &\quad O = (0, 0, 0), \\ d(O, F)^2 &= (x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 0)^2, \\ \therefore d(O, F)^2 &= (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Omdat de assen van de ruimte in Figuur 1 ruimtelijk en Euclidisch zijn, wordt $d(O,F)^2$ een ruimtelijke of Euclidische interval genoemd. Het interval kan overigens ook gezien worden als een balk (een recht prisma op een vierhoekig grondvlak) waarvan zijn ruimtelijke diagonaal gelijk is aan $d(O,F)$, hiermee een gebied in een 3D-ruimte afbakenend.

In de echte wereld zouden we, om ons ervan te verzekeren dat we elkaar zullen ontmoeten op de juiste plek, de volgende coördinaten kunnen geven: 1 Einstein Drive, eerste verdieping. Zie Einstein Drive als een plek op de x-as (naast andere x-asplekken als Battle Road, Mercer Road), nummer 1 als een plek op de y-as en de eerste verdieping als een plek op de z-as.

Wat we nu nog nodig hebben is een beetje extra informatie: wanneer ontmoeten we elkaar?

2 Tijdinterval

Stel, Figuur 2 toont een tijdsserie van een foton op weg naar punt F en verder. Het toont aan dat we in een wereld leven waar we niet alleen drie ruimte coördinaten, maar ook een tijdcoördinaat nodig hebben. Het is logisch de mensen die je zou moeten treffen niet alleen te vertellen waar in de ruimte je zal zijn, maar ook wanneer in de tijd je daar zal zijn.

Ons foton P vliegt door F op $t = 3$. Dit betekent dat de tijdcoördinaat van de gebeurtenis dat het foton F heeft bereikt, gelijk is aan:

$$t_F = 3.$$

Aannemende dat op $t = 0$ foton P zich bij de oorsprong bevindt,

$$t_O = 0,$$

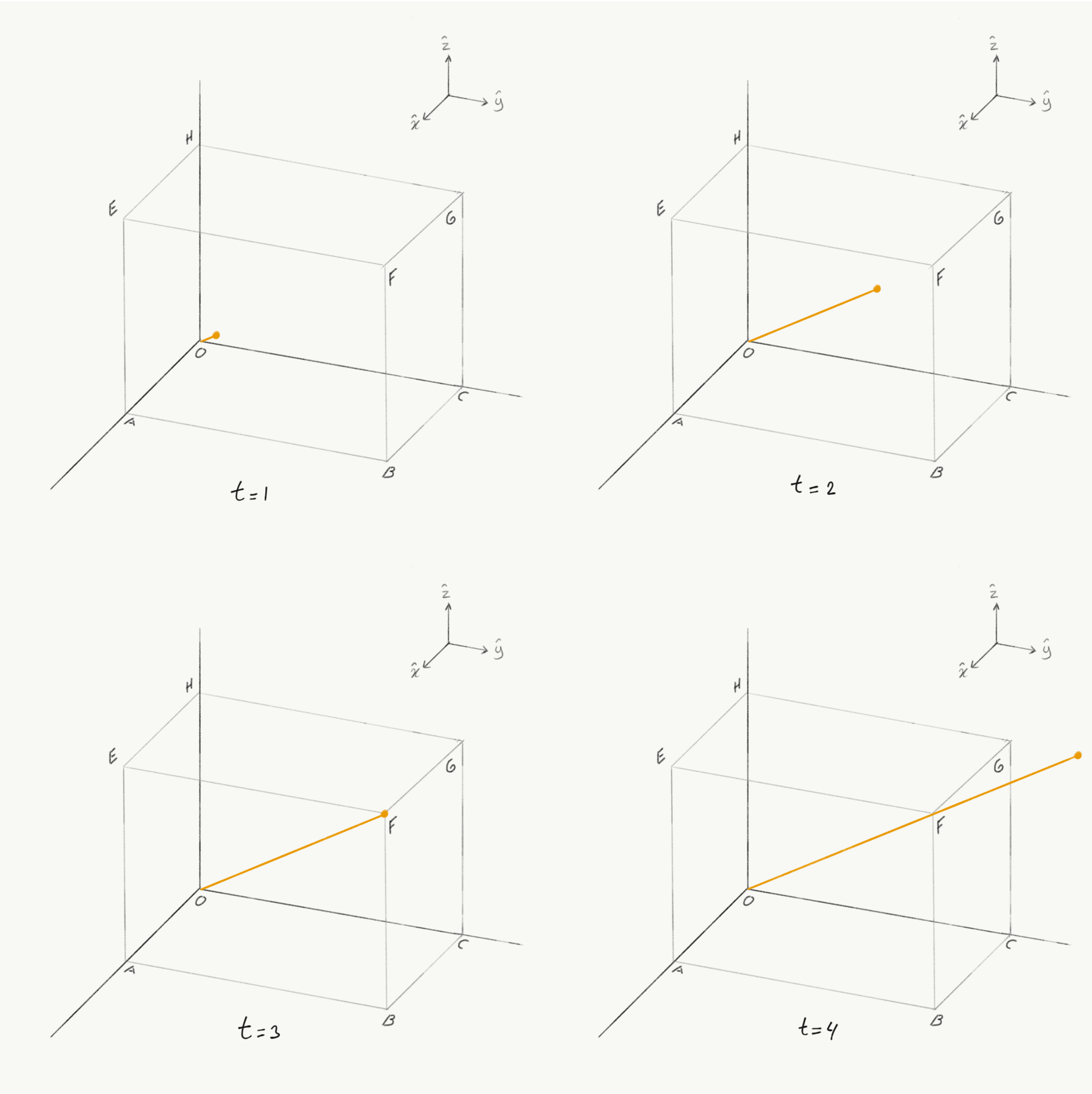
kunnen we schrijven voor een temporeel interval tussen wanneer het foton O verlaat en F bereikt:

$$\Delta t_{OF} = t_F - t_O = 3 - 0 = 3.$$

3 Eenheidsconversie van tijd naar afstand

Zoals de vorige twee hoofdstukken hopelijk duidelijk maakten, hebben we vier coördinaten nodig om een *gebeurtenis* te beschrijven, zoals bijvoorbeeld de gebeurtenis waarbij foton P punt F bereikt. De drie ruimtelijke afstanden worden uitgedrukt in een afstandseenheid, meestal de meter. De enkele tijdsafsand is geen afstand in de traditionele zin van het woord en wordt meestal uitgedrukt in seconde. Dit maakt het wel lastig om ze op een zinvolle manier met elkaar te vergelijken.

Om tijdseenheden te converteren naar afstandseenheden vermenigvuldigen we met een natuurconstante, de lichtsnelheid c, die, bij Einsteins tweede postulaat (Einstein, 1905), nota bene invariant is: onafhankelijk van welk referentiekader je verkiest, de lichtsnelheid is altijd constant. Voor een uitgebreidere beschrijving van deze conversie, lees hoofdstuk 4.3 van Deriving the Lorentz transformations from



Figuur 2: Een foton reist van O naar F in een driedimensionale ruimte in een bepaalde periode

a rotation of frames of reference about their origin with real time Wick-rotated to imaginary time. We concluderen hier dat onze tijdinterval een temporele afstand wordt:

$$\Delta t \mapsto c\Delta t.$$

4 Ruimtetijdinterval

In Figuur 3 hebben we de *ruimtelijke* z-as laten vervallen en in de plaats daarvan de *temporele* ct-as (dat is dus tijd uitgedrukt in afstandseenheden) gebruikt zodat we een begrijpelijke tekening in het platte vlak kunnen maken. In werkelijkheid beweegt het foton uiteraard nog steeds in de z-richting. (We zijn tot dusverre niet in staat gebleken een vierdimensionaal object op een plat vlak te tekenen.) Let ook op de eenheidsvectoraanduiding rechtsboven en de afstandspunten die zijn aangegeven met Δx, Δy en $c\Delta t$. Denk er vervolgens heel hard een toegevoegde vierde ruimtelijke afstandspunt Δz bij, ergens.

Om de ruimtelijke afstand $d(O, F)$ van ons foton te berekenen, laten we vergelijking (1) nog eens bekijken:

$$d(O, F)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2. \quad (1)$$

Aangezien we weten dat snelheid, in het algemeen, wordt berekend met $v = \Delta x/\Delta t$, waarbij x de afgelegde afstand is in een richting, en $v = c$ in het geval van ons foton, kunnen we voor de afgelegde afstand van O naar F door ons foton schrijven:

$$\begin{aligned} d(O, F) &= v\Delta t, \\ d(O, F)^2 &= (v\Delta t)^2, \\ \therefore d(O, F)^2 &= (c\Delta t)^2. \end{aligned}$$

Dit wordt interessant, aangezien $(c\Delta t)^2$ ook (het kwadraat van) de *temporele* afstand is. Als we vergelijking (1) in de vergelijking hierboven substitueren, verkrijgen we

$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = (c\Delta t)^2.$$

Als we dit enigszins herschikken, levert het

$$-(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = 0.$$

Hoewel dit leuk en aardig is, is de hamvraag nu wat *is* nul hier? Als we het antwoord hierop weten, weten wat alle termen aan de linkerzijde van het is-gelijkteken zijn.

Als iets gelijk is aan nul is er in de natuur- en wiskunde iets bijzonders aan de hand: het kan betekenen dat je te maken hebt met een systeem in een bepaalde stabiele configuratie, misschien zelfs statisch, het kan wijzen op een constante beweging, een energetisch equilibrium met de laagste waarde, een attractor, de nulwaarde van een functie als oplossing van een specifieke set parameters, een behoudswet, homogeniteit of een minimum of maximum van het een of ander.

In het algemeen betekent het dat er sprake is van een bepaalde symmetrie, wat op zijn beurt inhoudt dat er iets is dat behouden blijft. Hier zijn diepe inzichten aan te boren, zoals Emmy Noether ons leerde (Noether, 1918), en haar genialiteit verdient niets minder dan een hele serie artikelen op zich.

Niettemin, voor nu concluderen we dat, onafhankelijk van welk coördinatenstelsel men hanteert, waarmee verschillende waarden voor Δx, Δy, Δz, en zelfs Δt worden gegenereerd, zoals de lorentztransformaties ons leerden, *de som van al deze variabelen blijft invariant*. De nul wijst op het feit dat ongeacht zijn vier bewegende delen—los van welk referentiekader je verkiest—de resultante is een constante, oftewel, invariant.

De kwantiteit aan de linkerzijde heeft een naam; het heet de ruimtetijdinterval en wordt aangeduid met $(\Delta s)^2$. De s staat voor het Engelse ‘separation’, wat we hier zouden kunnen vertalen met ‘scheiding’. Het gaat om de scheiding tussen gebeurtenissen. Als we het woord afstand hadden gebruikt (dat wil zeggen, d voor ‘distance’), had het misschien onbedoeld meer verwezen naar een ruimtelijke afstand dan iets anders, vandaar dat we scheiding gebruiken, $(\Delta s)^2$. Dus de ruimtetijdinterval wordt vaak als volgt opgeschreven:

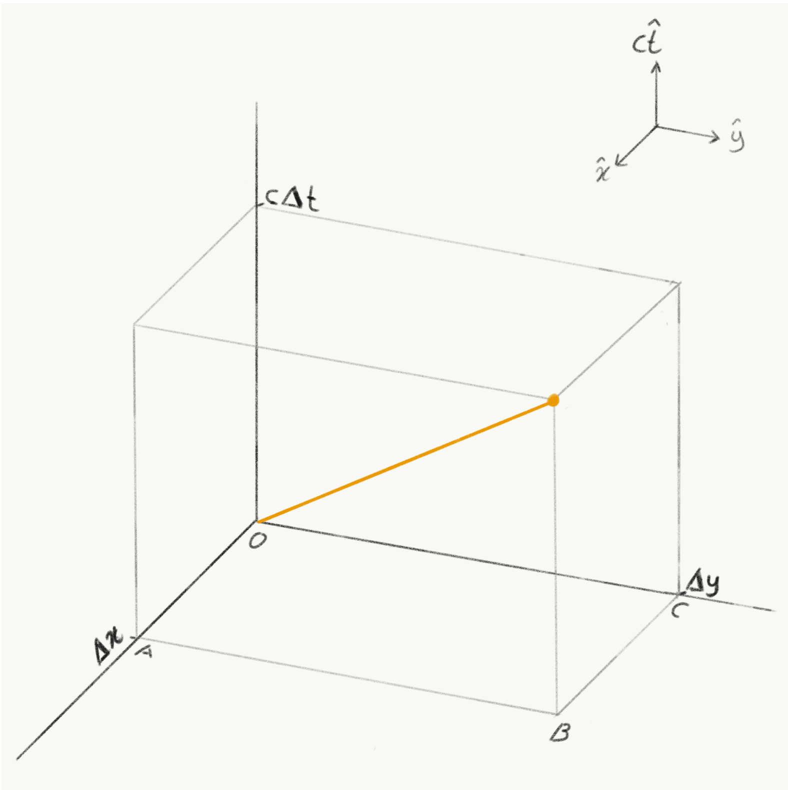
$$(\Delta s)^2 = -(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2.$$

De plus- en mintekens voor de termen kunnen omgedraaid worden in sommige boeken en artikelen, maar het is in elk geval belangrijk om op te merken dat, hoewel tijd vergelijkbaar gemaakt is met ruimte qua eenheden door vermenigvuldiging met c, nog steeds te zien is hoe tijd een speciale rol inneemt in het interval van het weefsel van de kosmos.

Referenties

Einstein, A. (1905). Zur Elektrodynamik bewegter Körper, *Annalen der Physik* **322**(10): 891–921.

Noether, E. (1918). Invariante Variationsprobleme, *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse* **1918**: 235–257.
URL: *http://eudml.org/doc/59024*



Figuur 3: Een ruimtetijddiagram met twee ruimtelijke dimensies en een temporele dimensie.