
OPENCURVE

A BIT OF MATHS AND PHYSICS. FOR EVERYONE.

AFLEIDING VAN DE LORENTZTRANSFORMATIES UIT DE ROTATIE VAN REFERENTIEKADERS MET EEN WICK-ROTATIE VAN REËLE TIJD NAAR IMAGINAIRE TIJD

door @kjrnia
2020-06-12

De lorentztransformaties, bekend om hun centrale rol in Einsteins speciale relativiteitstheorie, worden afgeleid uit de rotatie van twee referentiekaders in standaard configuratie, waarbij de tijd gezien wordt als imaginaire eenheid van ruimtetijd. Deze afleiding zie je niet vaak. Er zijn weinig boeken voor bachelorstudenten of online artikelen die de details van de uitwerking bieden. Vandaar, dit artikel.

Inhoudsopgave

1	Introduction	2
2	Standaard configuratie	2
3	Invarianties	4
4	Wick-rotatie en imaginaire tijd	6
4.1	Getallenverzamelingen	6
4.2	Translatie en rotatie	7
4.3	Minkowski-diagrammen	10
4.4	Opnieuw Wick-rotatie	14
5	Afleiding van de lorentztransformaties	15
5.1	Invariante wereldlijn in het complexe vlak	15
5.2	Coördinaten uitgedrukt met andere coördinaten	17
5.3	De lorentztransformaties	18

1 Introduction

“One might think this means that imaginary numbers are just a mathematical game having nothing to do with the real world. (...) It turns out that a mathematical model involving imaginary time predicts not only effects we have already observed but also effects we have not been able to measure yet nevertheless believe in for other reasons. So what is real and what is imaginary? Is the distinction just in our minds?”

S. Hawking (2001, p. 59)

Hoewel er vele afleidingen van de lorentztransformaties zijn te vinden in studieboeken, syllabi en online, de versie waar Henri Poincaré naar hintte (Walter, 2014) en Hermann Minkowski vervolgens verder mee speelde—onredelijkerwijs op z’n zachtst uitgedrukt—in wat we nu minkowski-ruimte noemen, blijft wat mij betreft een van de elegantste, doch is zelden uiteengezet op een van de voornoemde plekken.

Henri Poincaré merkte op dat als de tijdas van de twee coördinatenstelsels imaginair is gemaakt, d.i. de imaginaire as in het complexe vlak, de transformaties zoals beschreven door Hendrik Lorentz automatisch tevoorschijn komen na rotatie van de twee referentiekaders in dit complexe vlak.

In dit document beschrijven we hoe dit wordt uitgevoerd. We nemen aan dat de lezer bekend is met complexe getallen.

Het doel is om de volgende set lorentztransformaties af te leiden:

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (1)$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (2)$$

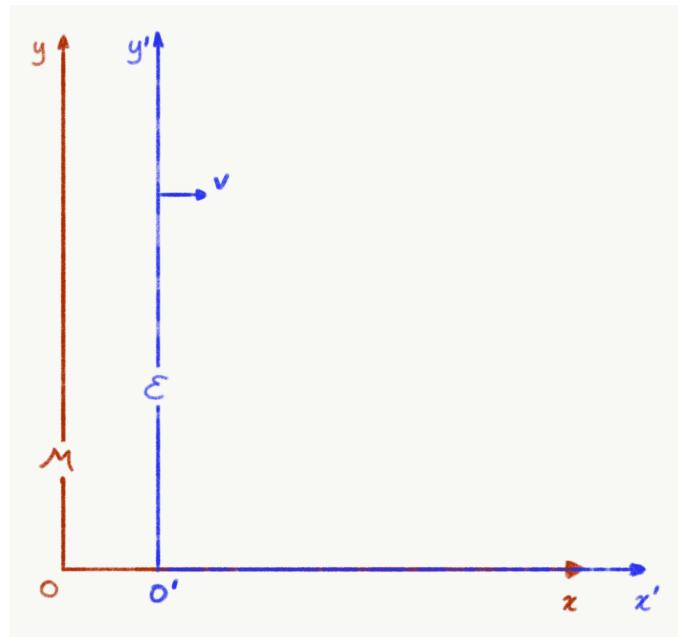
$$y' = y,$$

$$z' = z,$$

waarbij (t, x, y, z) en (t', x', y', z') de coördinaten zijn van een gebeurtenis in twee referentiekaders. Het geaccentueerde (') referentiekader, gezien vanuit het nietgeaccentueerde kader, beweegt zich met snelheid v voort in de x -richting. De snelheid van het licht in vacuüm wordt aangeduid met c . Zijdelings merken we op dat de terugkerende term $(\sqrt{1 - v^2/c^2})^{-1}$ de lorentzfactor wordt genoemd en doorgaans wordt aangeduid met de letter γ .

2 Standaard configuratie

Stel, Hermann staat stil op de grond. Albert rijdt met zijn auto weg van Hermann met snelheid v . WWe hebben dan te maken met twee referentiekaders. Er is het kader van Hermann, $\mathcal{M}$ (de grond), met de oorsprong O aan Hermanns voeten op de grond. En er is het kader van Albert $\mathcal{E}$ (de auto), met de oorsprong O' ter hoogte van Alberts achterwerk op zijn stoel. Hun referentiekaders zijn in een zogenaamde standaard configuratie zoals weergegeven in Figuur 1. Dit betekent



Figuur 1: Een tweedimensionale weergave van Hermann Minkowski's referentiekader $\mathcal{M}$ en Albert Einsteins kader $\mathcal{E}$ in een standaard configuratie: het laatste beweegt met snelheid v ten opzichte van het eerste in de richting van x . Er is geen beweging in de y - of z -richting. Merk op dat enige tijd is verlopen in dit diagram. Op tijd $t = 0$, waren niettemin de oorsprongen gelijk. Met andere woorden, op de temporele coördinaten $t = t' = 0$, waren de ruimtelijke coördinaten gelijk, $x = x' = 0$.

dat op tijdstip $t = 0$ in kader $\mathcal{M}$, waarvoor ook geldt $x = 0$, het tijdstip $t' = 0$ en positie $x' = 0$ geldig is in kader $\mathcal{E}$, en dat het ene kader zich eenparig rechtlijnig (constant) beweegt ten opzichte van het andere. Met andere woorden, $\mathcal{M}$ en $\mathcal{E}$ zijn, zagezegd, gesynchroniseerd als voor de ruimtetijdcoördinaten geldt:

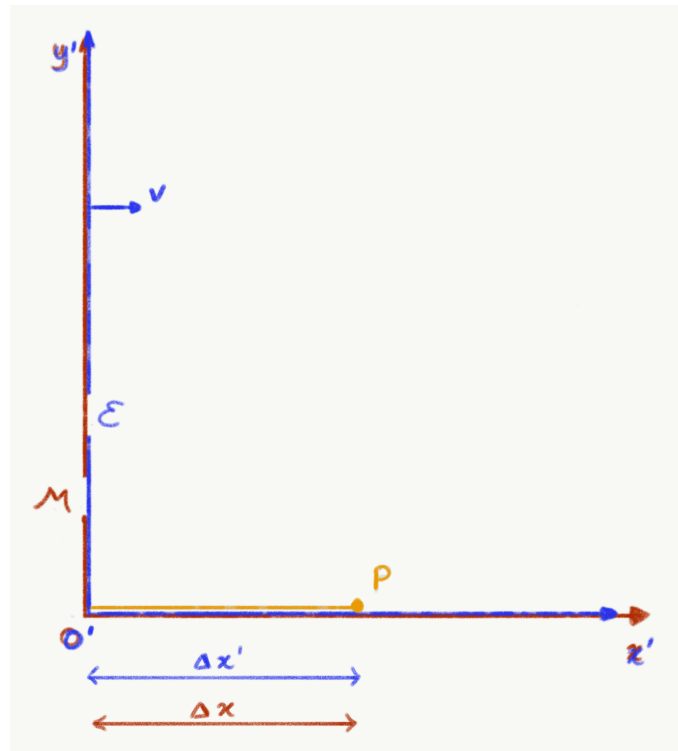
$$(t, x) = (t', x') = (0, 0).$$

Uiteraard, in de echte wereld zijn er vier ruimtetijdcoördinaten in ieder kader, namelijk (t, x, y, z) en (t', x', y', z') , maar om onze berekeningen een klein beetje makkelijker te maken, houden we het enkel op de tijdscoördinaat t (en t') en ruimtelijke coördinaat x (en x').

Aldus, kijkend naar Figuur 1, zien we vanuit Hermanns perspectief—zich ophoudend in de oorsprong O van $\mathcal{M}$ —dat $\mathcal{E}$'s oorsprong O' zich voortbeweegt met snelheid v ten opzichte van de x -as van $\mathcal{M}$. Snelheid v , betekent uiteraard alleen maar dat $\mathcal{E}$ zich voortbeweegt met een bepaalde hoeveelheid eenheden van x (bijv. meters) per een bepaalde hoeveelheid eenheden van t (bijv. seconden). Dit is niets nieuws, maar het is voor onze afleiding van de lorentztransformaties van belang om ons secundair onderwijs een beetje te herhalen:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

in Hermanns referentiekader $\mathcal{M}$. Enigszins omgedraaid, als we willen berekenen hoeveel ruimtelijke eenheden $\mathcal{E}$'s oorsprong zich heeft verplaatst van $\mathcal{M}$'s oorsprong,



Figuur 2: Op tijdstip $t = t' = 0$, vuurt Albert een foton P in de x -richting. BZowel het foton alsook Einstein's kader $\mathcal{E}$ bewegen in deze zelfde x -richting.

vandaan, herschrijven we de laatste vergelijking in de mogelijk bekendere wet van eenparig rechtlijnige beweging:

$$\Delta x = v \Delta t, \quad (3)$$

in Hermanns referentiekader $\mathcal{M}$.

Zijdelings zij opgemerkt dat de auto wat Albert betreft niet beweegt; hij zit in de auto. (Eerder is het de rest van de wereld die zich voortbeweegt ten opzichte van zijn auto en zichzelf.) Als de auto ten opzichte van Albert in beweging zou zijn, dan hebben we te maken met de dreiging van een ongeluk met potentieel serieuze consequenties. Dus, omwille van Alberts welbevinden, stellen we dat zijn eigen snelheid binnen zijn eigen kader $\mathcal{E}$ (de auto) wordt uitgedrukt met $v' = 0$, zolang hij op z'n plaats blijft zitten met de gordel om. Dus, de wet van eenparig rechtlijnige beweging door Albert, binnen zijn kader $\mathcal{E}$, wordt:

$$\Delta x' = v' \Delta t' = 0 \Delta t' = 0.$$

3 Invarianties

Als $\mathcal{E}$ zich eenparig rechtlijnig voortbeweegt ten opzichte van $\mathcal{M}$, in een dimensie, de x -richting, zoals beschreven in vergelijking (2), dan noemen we dit, meetkundig, een translatie in de x -richting. Natuurkundig is het een translatiebeweging in de x -richting.

Veronderstel dat, op tijdstip $t = t' = 0$, Albert, aan boord van zijn auto, zijn speciale, foto-elektrische kanon activeert, waardoor hij precies een foton P in de x -richting afvuurt. Figuur 2 toont hoe de foton door de ruimte van beide referentiekaders vliegt.

Uit het diagram valt af te lezen dat de ruimtelijke coördinaten in de y -richting onveranderd blijven, $y = y' = 0$, dus om het simpel te houden laten we deze verder buiten beschouwing in onze vergelijkingen. Niettemin, vanwege het feit dat $\mathcal{E}$ zich voortbeweegt ten opzichte van $\mathcal{M}$ in de x -richting, weten we dat $x \neq x'$ bij $t > 0$. En omdat we niet zeker weten dat $t = t'$ bij $t > 0$, alleen dat $t = t' = 0$, moeten we concluderen dat de locatie van P verschilt:

$$\begin{aligned} \text{in Alberts } \mathcal{E}: P &= (t', x'), \\ \text{in Hermanns } \mathcal{M}: P &= (t, x). \end{aligned} \quad (4)$$

Einsteins *Voraussetzungen* (Einstein, 1905) accepterende, weten we gelukkig dat de snelheid van het licht, c , gelijk is in ieder referentiekader. Gebruikmakend van vergelijking (2), $x = vt$, en het feit dat, in dit geval, $v = c$, kunnen we voor de *afstand* die foton P aflegt—de gele lijn in het diagram—in de coördinaten van de respectievelijke referentiekaders schrijven::

$$\begin{aligned} \text{in Alberts } \mathcal{E}: \Delta x' &= c\Delta t', \\ \text{in Hermanns } \mathcal{M}: \Delta x &= c\Delta t. \end{aligned}$$

Aangezien het voor ieder coördinatenstelsel mogelijk is dat het punten bevat die aan de negatieve zijde van de oorsprong van een ruimtelijke dimensie liggen, zoals x in ons geval, en dat licht zich dus ook kan verplaatsen in de negatieve x -richting, kwadrateren we beide vergelijkingen om altijd een positieve waarde te verkrijgen.

$$\begin{aligned} (\Delta x')^2 &= (c\Delta t')^2, \\ (\Delta x)^2 &= (c\Delta t)^2. \end{aligned}$$

Als we dit herschikken,

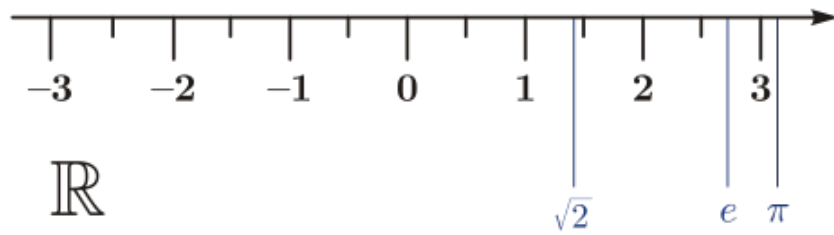
$$\begin{aligned} (\Delta x')^2 - (c\Delta t')^2 &= 0, \\ (\Delta x)^2 - (c\Delta t)^2 &= 0, \end{aligned}$$

zien we dat beide gelijk zijn aan nul, wat ons toestaat om te schrijven

$$(\Delta x')^2 - (c\Delta t')^2 = (\Delta x)^2 - (c\Delta t)^2. \quad (5)$$

Dit is een prachtig resultaat aangezien het aantoont dat onafhankelijk van welk referentiekader je je in bevindt, afgezien van c , Albert en Hermann ook in overeenstemming zijn met de kwantiteit $(\Delta x)^2 - (c\Delta t)^2$, ondanks het feit dat de coördinaten van P niet noodzakelijkerwijs dezelfde zijn in ieder referentiekader, zoals we zagen in (3). Met andere woorden, zowel c als $(\Delta x)^2 - (c\Delta t)^2$ worden *invariant* genoemd.

Zou kunnen dat je je afvraagt, wat is die invariante kwantiteit $(\Delta x)^2 - (c\Delta t)^2$, precies? Welnu, dit wordt behandeld in een andere post, genaamd Wat is een ruimtetijdinterval? En nu hebben we waarschijnlijk al verteld wat het is. Hoe dan ook, laten we doorgaan met de afleiding van lorentztransformaties en voorlopig in het achterhoofd houden dat $(\Delta x)^2 - (c\Delta t)^2$ een heel mooie invariantie is, onveranderd en gelijk in beide referentiekaders. Laten we nu overgaan op imaginaire tijd.



Figuur 3: Een segment van de reële getallenlijn, de verzameling $\mathbb{R}$ van alle reële getallen, die oneindig is aan beide zijden.

4 Wick-rotatie en imaginaire tijd

4.1 Getallenverzamelingen

Zoals velen van ons zouden moeten weten, toont Figuur 3 een (segment van een) reële getallenlijn die de verzameling $\mathbb{R}$ is van alle reële getallen. Het is de culminatie van van alle voorgaande uitbreidingen van de toentertijd bekende getallenverzamelingen. Beginnend met de natuurlijke getallen, een verzameling die normaal gesproken wordt aangeduid met $\mathbb{N}$, alle positieve, gehele getallen bevattend en zijn oorsprong vindend in de natuurlijke act van tellen, werd het numerieke repertoire uitgebreid met de notie van negatieve, gehele getallen. In plaats van slechts 1, 2, 3, konden we nu ook tot -1, -2, -3 etc. tellen. Deze uitbreiding wordt aangeduid met $\mathbb{Z}$. Onnodig te zeggen dat $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, maar we deden het zojuist toch.

Uiteraard waren er behoorlijke slimme mensen die erkenden dat er een andere uitbreiding nodig was: breuken die verhoudingen of ratio's weergaven, beter bekend als de rationale getallen, zoals $1/2$, $1/-3$, $1/4$, $-1/100$, met andere woorden, quotiënten van twee gehele getallen. Deze getallen bevinden zich tussen de gehele getallen van $\mathbb{Z}$. Het symbool is $\mathbb{Q}$ en dat $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ is een overbodige toevoeging.

Hoewel ingekerfd op een stenen plaat, gevonden in Susa (Irak) in 1936, gedateerd rond 2000 BCE en gebruikt door Babyloniërs, namelijk dat

$$\frac{3}{\pi} = \frac{57}{60} + \frac{36}{(60)^2}, \therefore \pi = \frac{25}{8} = 3.125,$$

duurde het tot 1761 voordat het bewijs dat π irrationaal is geleverd werd door Johann Heinrich Lambert (Bailey, 2016) wat betekende dat het niet geconstrueerd kan worden door welke verhouding van gehele getallen ook, evenals vele andere getallen, zoals $\sqrt{2}$. En dus was wederom een uitbreiding van de bestaande getallenlijn benodigd. Dit was de voornoemde lijn die de verzameling $\mathbb{R}$, representeerde, of, om precies te zijn, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

En toen, in de zestiende eeuw, ontdekten mensen als de rivalen Tartaglia en Cardano, onafhankelijk van elkaar, dat oplossingen van kwadratische vergelijkingen soms het hanteren van de wortels van negatieve getallen vereiste, zoals $\sqrt{-1}$. Later ontwikkelde Bombelli fatsoenlijke operaties zoals optellen en aftrekken. Een groot aantal wiskundigen ontwikkelden over verschillende decennia wat nu bekend is als het complexe vlak of het gaussiaanse vlak (Cooke, 2013) van de verzameling $\mathbb{C}$,

de reële getallenlijn uitbreidend met een imaginaire as met meervouden van de imaginaire eenheid $i = \sqrt{-1}$. (Dit is, uiteraard, de oplossing van de kwadratische vergelijking $x^2 + 1 = 0$.) We realiseren ons dat het vermelden van het feit dat $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ inmiddels uitermate redundant is.

4.2 Translatie en rotatie

Laten we opnieuw kijken naar de natuurlijke getallenlijn van $\mathbb{N}$. Als we het getal 1 zouden willen converteren naar een getal dat niet bestaat in $\mathbb{N}$ maar wel zou kunnen bestaan op de lijn der gehele getallen van $\mathbb{Z}$, dan kunnen we het natuurlijke getal 1 simpelweg vermenigvuldigen met een getal uit $\mathbb{Z}$, namelijk het negatieve, gehele getal -1 . Aangezien $1 \times -1 = -1$, zijn we overgestapt van $\mathbb{N}$ op $\mathbb{Z}$. We ‘gleden’ van 1 naar -1 , hoewel in een andere getallenverzameling, hetgeen wiskundig hetzelfde is als een *translatie* van -2 . Dit is makkelijk uitgedrukt zijnde startende van positie 1, optelling van -2 en eindigend op positie -1 op de getallenlijn van, minstens, $\mathbb{Z}$ (maar niet $\mathbb{N}$): $1 + -2 = -1$. Figuur 4a poogt dit te tonen.

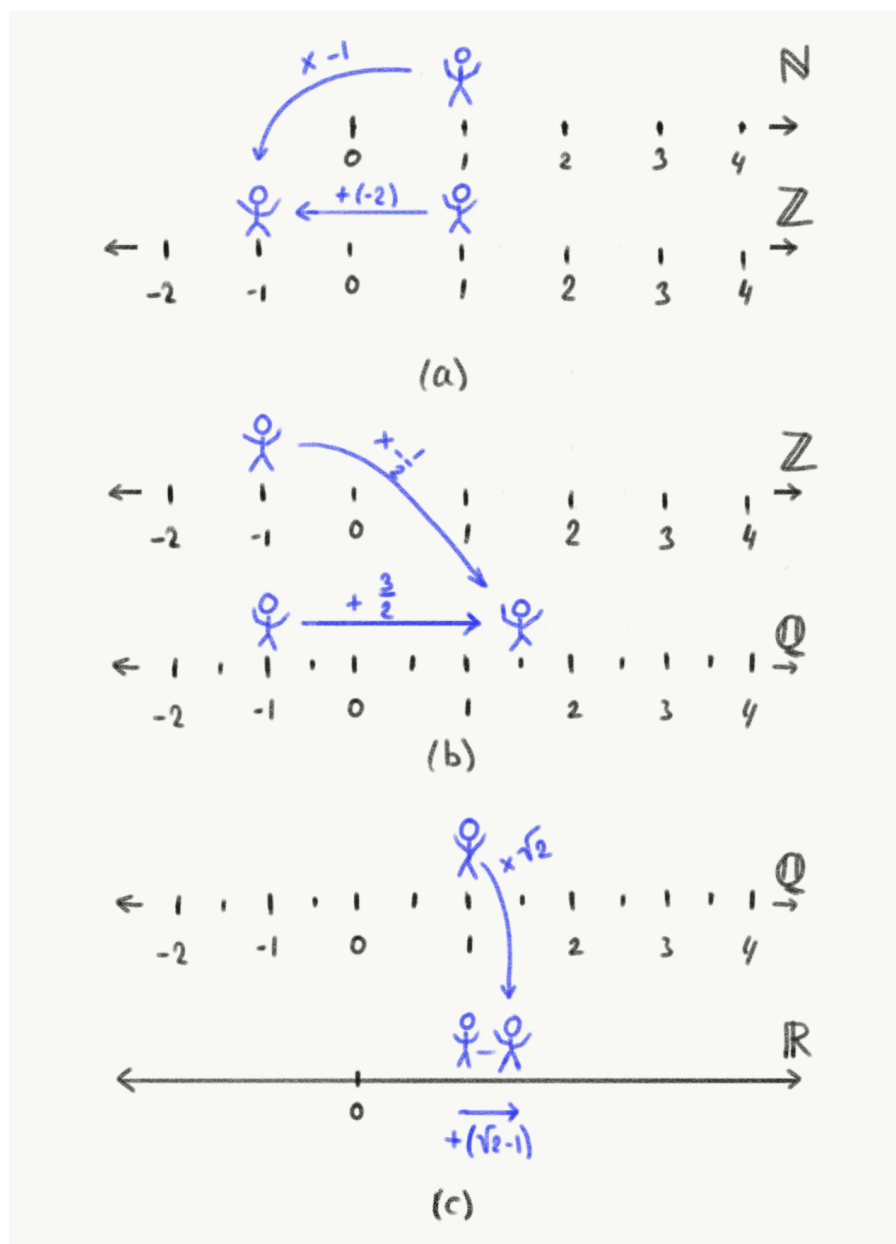
We kunnen hetzelfde uitvoeren vanaf positie -1 in $\mathbb{Z}$ naar een getal dat geen element is van $\mathbb{N}$, noch van $\mathbb{Z}$, maar minstens van $\mathbb{Q}$ door simpelweg te vermenigvuldigen met een breuk, zoals $-1/2$, die zelf ook geen element is van $\mathbb{N}$ of $\mathbb{N}$. Dit is, wederom, eigenlijk een translatie, maar nu door er $3/2$ bij op te tellen: $-1 + 3/2 = 1/2$. Figuur 4b poogt dit te tonen.

Op dezelfde wijze transformeren we positie 1 in $\mathbb{Q}$ naar $\mathbb{R}$ door bijvoorbeeld te vermenigvuldigen met $\sqrt{2}$, dat wel in $\mathbb{R}$ bestaat maar niet in $\mathbb{Q}$, en dus is het resultaat $1 \times \sqrt{2} = \sqrt{2}$ element van minstens $\mathbb{R}$ doch niet $\mathbb{Q}$, noch $\mathbb{Z}$, noch $\mathbb{N}$. Het resultaat is tevens een translatie van $1 + (\sqrt{2} - 1) = \sqrt{2}$ in $\mathbb{R}$. Figuur 4c poogt dit te tonen.

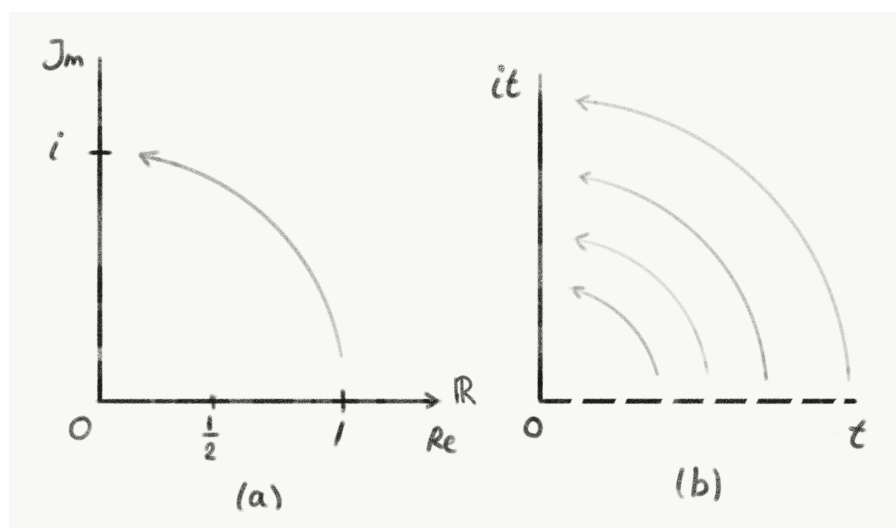
Merk op dat, tot nu toe, de transformaties van het getal 1 of een ander getal het ‘glijden’ op de getallenlijnen inhield, eendimensionaal. Telkens als een nieuw type getal werd geïntroduceerd—de negatieve, gehele getallen, breuken en, ten slotte, reële getallen—werd er een nieuwe getallenverzameling gecreëerd, als het ware, en de getallenlijn evolueerde van discrete vorm ($\mathbb{N}$) tot een lijncontinuüm ($\mathbb{R}$). De vraag is, wat zal de volgende uitbreiding zijn en hoe zou dat er uit zien?

Zoals eerder beschreven werd het in de zestiende eeuw duidelijk dat een nieuw type getal benodigd was om een groot aantal kwadratische vergelijkingen (Cooke, 2013) op te lossen. Met dank aan mensen als Wallis, Wessel, Argand, Buée, Mourey, Warren, Français, Bellavitis, Gauss en Euler (Cooke, 2013; Sandro, 2006), werd het idee om de reële getallenlijn van $\mathbb{R}$ uit te breiden met een imaginaire, *loodrechte* getallenlijn. Dit creëerde het zogenaamde complexe vlak, soms noemt men het ‘t z -vlak, gaussvlak of argandvlak. Het is belangrijk om vast te stellen dat de transformatie van een reëel getal in $\mathbb{R}$ naar een complex getal in $\mathbb{C}$ geen translatie maar een *rotatie* inhoudt. Het vermenigvuldigen van een reëel getal in $\mathbb{R}$, bijvoorbeeld 1, met een getal dat alleen in $\mathbb{C}$ bestaat, bijvoorbeeld i , is hetzelfde als de geometrische rotatie van onze positie 1 op de reële as ter grootte van $\pi/2$ naar de positie i op de imaginaire as, zoals weergegeven in Figuur 5a.

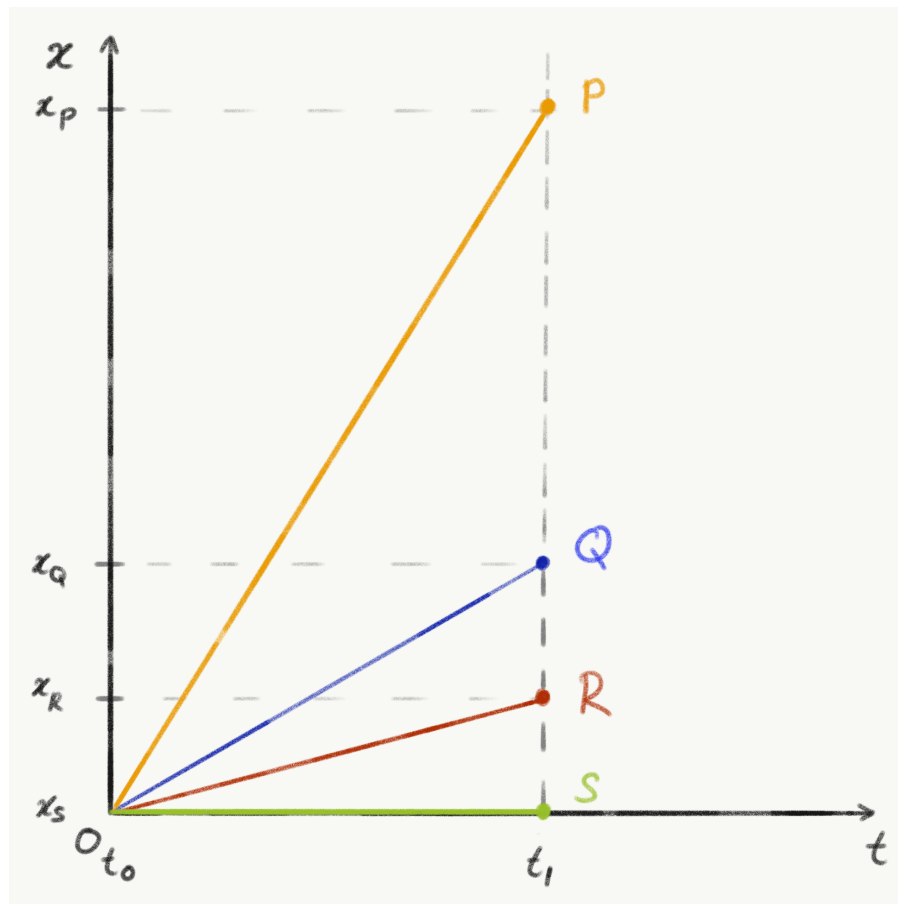
Wat nu als we dit zouden doen met de gehele reële tijdas in een ruimtetijd-diagram zoals getoond in Figuur 5b? Ieder element van de reële tijdas t wordt



Figuur 4: Iedere opeenvolgende getallenverzameling is een uitbreiding van de voorgaande. We kunnen van een simpele naar een complexere verzameling bewegen door bijvoorbeeld simpelweg onze huidige positie te vermenigvuldigen met een getal dat alleen aanwezig is in de complexere verzameling. Hoewel het lijkt alsof we van de ene naar de andere verzameling buitelen, zijn we eigenlijk enkel naar links of naar rechts aan het ‘glijden’, in een dimensie, op de getallenlijn van die complexere verzameling. Deze glijdende beweging wordt translatie genoemd. Nota bene: het aantal deelstreepjes in $\mathbb{Q}$ is veel groter, maar om voor de hand liggende redenen zoals leesbaarheid hebben we alleen iedere $1/2$ -ratio aangeduid.



Figuur 5: Vergeleken met de toenemende complexiteit van de getallenlijnen in Figuur 4, dit is de meest complexe tot nu toe. Twee Wick-rotaties in het complexe vlak $\mathbb{C}$, waar (a) de Re-as de reële getallenlijn van $\mathbb{R}$ is en de Im-as de imaginaire eenheidslijn is van de verzameling $\mathbb{C}$. Merk op dat een complex getal uit beide bestaat: a reëel deel en een imaginair deel. Bijvoorbeeld, het complexe getal z wordt geschreven in de vorm $z = a + bi$, met $i = \sqrt{-1}$. Het reële deel z is $\text{Re}(z) = a$ en het imaginaire deel $\text{Im}(z) = b$. Dus $z = 1 + i$, $z = 1/2 + 3i$, $z = 3$ zijn allemaal complexe getallen, waar de laatste een imaginair deel heeft waarvoor geldt $\text{Im}(z) = 0$, hetgeen we dan gewoon weglaten, aangezien $0i = 0$. Een complex getal is dus tweedimensionaal, ingebed in een vlak met een reële as en een imaginaire as. (b) Wick-rotatie van alle reële getallen op de tijdas naar de imaginaire as, waarmee reële tijd wordt getransformeerd tot imaginaire tijd.



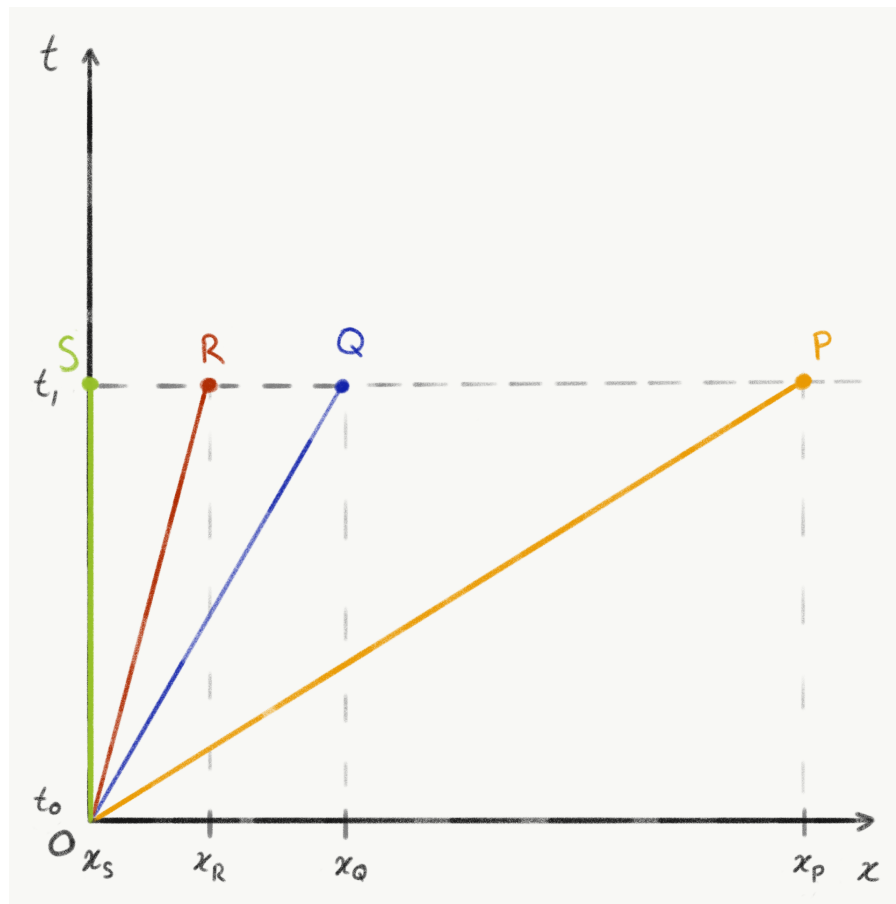
Figuur 6: De afstand-tijd-diagram waar we allemaal mee op zijn gegroeid. De onafhankelijke variabele tijd t als de x -as en afhankelijke variabele afstand, x , als de y -as. Vier deeltjes verplaatsen zich door tijd en (eendimensionale) ruimte, ieder met z'n eigen tijds-afhankelijke afstandsfunctie, dat wil zeggen, ieder met z'n eigen snelheid. Merk op dat P de grootste afstand aflegt over dezelfde periode, met andere woorden, het is de snelste. Merk ook op dat S exact nul afstand aflegt in diezelfde periode.

vermenigvuldigd met i . Met andere woorden, ieder deel wordt geroteerd in het complexe vlak tot een volledig imaginaire tijd it . Deze procedure wordt Wick-rotatie genoemd, naar de theoretisch-natuurkundige Gian Carlo Wick, die de procedure beschreef om vraagstukken in de kwantum- en statistische mechanica op te lossen (Wick, 1954).

Dit lijkt veelbelovend en is wat Henri Poincaré naar hintte vijftig jaren daarvoor. Voordat we verder gaan, moeten we nog een klein ding doen. Het heeft te maken met meeteenheden.

4.3 Minkowski-diagrammen

We groeiden allen op te leren om het type diagram van Figuur 6 af te lezen tijdens onze natuurkundelessen. Tijd is geprojecteerd op de x -as en afstand x is geprojecteerd op de y -as. Ietwat verwarrend, in eerste aanleg, aangezien men gewend kon zijn geraakt aan het gebruiken van x -waarden op de x -as tijdens wiskundeles-



Figuur 7: Een diagram van een natuurkundige, waar ruimtelijke afstand, x , geprojecteerd is op de x -as en temporele afstand t geprojecteerd is op de y -axis. Merk op dat hoe sneller een deeltje zich voortbeweegt, des te kleiner de hoek van zijn 'lijn' door ruimte en tijd met de x -as. Als het deeltje stationair is, 'reist' het alleen door tijd en de hoek met de x -as is gemaximaliseerd op $\pi/2$. Met andere woorden, het gaat gewoon recht omhoog.

sen. Uiteraard leert men vervolgens dat het minder te doen is om de namen van variabelen en assen, maar eerder om wat de onafhankelijke en wat de afhankelijke variabele is. De onafhankelijke variabele, in dit geval, tijd t (tijd vliegt, of we dit willen of niet) wordt dan over de *as* genaamd x (die niet veel te maken heeft met de *variabele* genaamd x) geprojecteerd en de afhankelijke variabele, toevallig genaamd x , over de y -as.

In dit diagram zien we vier deeltjes. De snelste, P , verplaatst zich in de x -richting (en dat is omhoog, maar niet noodzakelijkerwijs de lucht in, realiseert dat!) meer eenheden van x afleggend dan de andere drie nadat dezelfde hoeveelheid tijd t is gepasseerd. Dit is de reden waarom het een steilere helling heeft. De langzaamste is degene die volstrekt niet beweegt, het stationaire deeltje S . Het verplaatst zich in de tijd, wat de reden is voor zijn bestaan op tijdstip t_1 , terwijl het *ruimtelijk* niet bestaat op een bepaalde eenheden van x van de oorsprong vandaan. De facto bestaat het in exact dezelfde plek, de oorsprong.

Welnu, ontwen er maar aan: blijkt dat professionele natuurkundigen de assen graag omdraaien wat de tijd aangaat. Met andere woorden, ze projecteren

de afstandsvariabele x op de x -as, terwijl de tijdvariabele t bijna zonder uitzondering wordt geprojecteerd op de y -as. Ja, je hoorde het goed. Tijd gaat omhoog in het diagram van een natuurkundige. De zeer gewaardeerde professor Leonard Susskind, een theoretisch-natuurkundige van Stanford University, postuleerde zelfs, half-grappend, tijdens een college over het principe van de kleinste werking, dat natuurkundigen het enige type mens is die dit doet¹. Dus, draaien we onze diagram om zoals te zien is in Figuur 7.

Over eenheden gesproken, normaal gesproken wordt tijd gemeten in seconden en afstand in meters. Normaliter. Hoewel, herinner je je nog dat je met je ouders die nieuwe vrienden van hen bezocht en dat een van de eerste dingen die ze na aankomst zeiden was dat hun woonplaats eigenlijk niet zo ver verwijderd was dat het slechts een uurtje of twee rijden was? Afstand, hoewel tussen twee woonplaatsen normaliter gemeten in kilometer, wordt nu uitgedrukt in tijdseenheden. Aangenomen dat mensen legaal—van deur tot deur—met een gemiddelde snelheid van 100 km/h rijden, zal de afstand ongeveer 200 km zijn.

Waarom drukken mensen afstand soms uit in tijd? Soms zijn mensen niet geïnteresseerd in het exacte aantal kilometer, maar richten ze hun aandacht eerder op hoeveel van de kostbare tijd iets in beslag neemt, waardoor een antwoord in termen van tijd meer zin heeft.

Astrofysici doen een andere interessante afstand-als-tijd conversie als het om afstanden tussen sterrenstelsels gaat, bijvoorbeeld. Ze werken met lichtbaar licht dat in hun telescopen valt, en andere soorten straling. Bovendien werken ze met belachelijke grote afstanden, helemaal als ze zouden worden uitgedrukt in kilometer. En dus werken ze met *lichtjaren*, wat een als een tijdseenheid klinkt, maar een zekere afstand aanduidt. Een lichtjaar is de afstand die licht aflegt in een Juliaans jaar, dat is 365.25 dagen. Licht plant zich voort met een snelheid van $c = 299792458 \text{ ms}^{-1}$ in vacuüm. Om het aantal seconden in een Juliaans jaar te berekenen vermenigvuldigen we het aantal seconden in een minuut maal het aantal minuten in een uur maal het aantal uren per dag maal het aantal dagen in een Juliaans jaar:

$$\begin{aligned} &60 \text{ s} \times 60 \text{ minuten} \times 24 \text{ uren} \times 365.25 \text{ dagen} \\ &= 31557600 \text{ s.} \end{aligned}$$

Gebruikmakende van vergelijking (2) om de afstand x te berekenen die licht aflegt in een Juliaans jaar, verkrijgen we

$$\begin{aligned} x &= vt, \text{ en omdat } v = c, \text{ schrijven we:} \\ x &= ct, \\ &= 299792458 \text{ ms}^{-1} \times 31557600 \text{ s} \\ &= 9460730472580800 \text{ m,} \\ &= 9460730472580.800 \text{ km.} \end{aligned} \tag{6}$$

Omdat licht deze belachelijke grote hoeveelheden kilometers bestrijkt, is het heel logisch dat astrofysici bovenstaand feit gebruiken om de afstanden van sterren en

¹<https://youtu.be/3apIZCpmdls?t=1447>

sterrenstelsels te beschrijven. Hierdoor is het dichtstbijzijnde sterrenstelsel Andromeda slechts 2.5 lichtjaren van ons vandaan. Dit is duidelijk veel praktischer dan 23651826181452 km.

Dus, met betrekking tot het uitdrukken van afstanden in tijdseenheden hebben we geleerd dat

1. in het geval van ‘normaal geschaalde’ afstanden zoals tussen twee woonplaatsen, het uitdrukken van ruimtelijke afstand in tijdseenheden het gemakkelijker maakt om te *vergelijken* met de hoeveelheid tijd die men wenst te spenderen aan reizen—het verwordt tot het vergelijken van tijd met tijd;
2. in het geval van veel groter geschaalde afstanden als tussen twee sterrenstelsels, het uitdrukken van een ruimtelijke afstand in licht-eenheden van tijd het gemakkelijker maakt om de onpraktische grote getallen van de originele eenheden toch te kunnen *hanteren*.

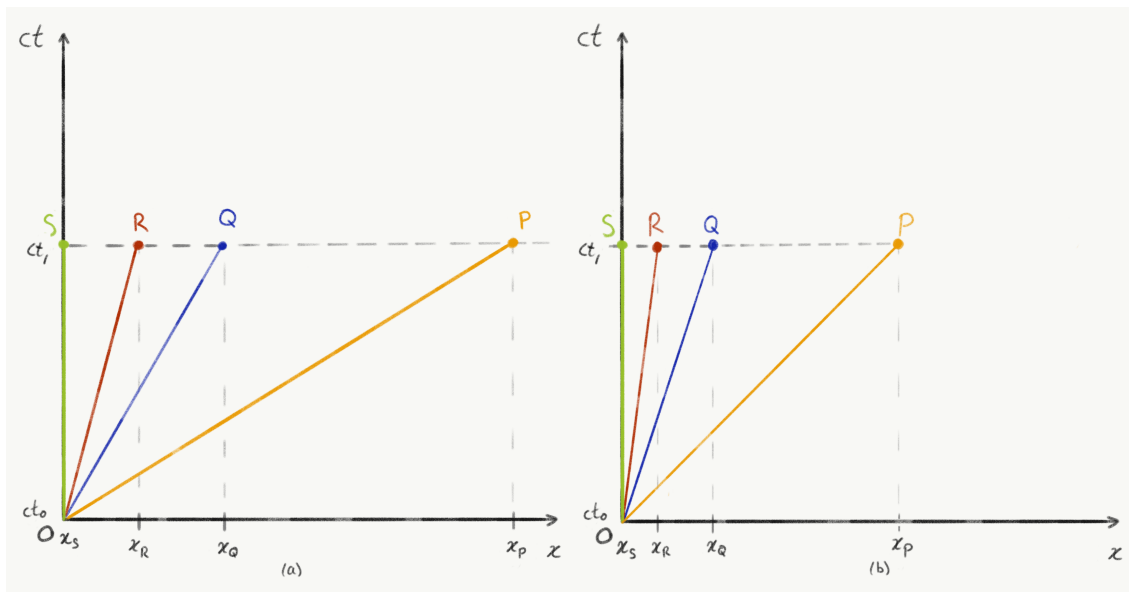
Als we weer terugkeren naar ons diagram van Figuur 7, zien we dat de eenheden van beide assen niet gelijk zijn. De x -as is de afstand, uitgedrukt in ruimtelijke eenheden, zoals meters. De y -as is de tijd, uitgedrukt in tijdseenheden zoals seconden. Het is lastig om de twee te vergelijken. Bovendien zijn deeltjesfysici gewend om met extreem snelle deeltjes te rekenen, nabij de lichtsnelheid, en is het onpraktisch om standaard tijdseenheden te gebruiken. Dus natuurkundigen hebben een oplossing bedacht voor beide problemen. Nummer een: wat als we de tijdseenheden in afstandseenheden zouden uitdrukken? Dus, dat is de omgekeerde situatie: niet afstand in tijdseenheden, maar tijd in afstandseenheden.

Om dat voor elkaar te krijgen, gebruiken we simpelweg de formule die gegeven is in vergelijking (4.3): $x = ct$. Met andere woorden, als we tijd t vermenigvuldigen met de lichtsnelheid c , verkrijgen we een afstand. Een kleine analyse van de eenheden toont aan dat dit klopt. Als we de eenheden van de lichtsnelheid vermenigvuldigen met de tijdseenheid, verkrijgen we een afstandseenheid:

$$\text{m s}^{-1} \times \text{s} = \text{m s}^{-1} \text{s} = \text{m} \frac{\text{s}}{\text{s}} = \text{m}.$$

Dit houdt niet in dat we op magische wijze, kwalitatief of zelfs slechts hypothetisch de tijddimensie in een ruimtedimensie hebben getransformeerd, hoewel dit een mooi concept zou zijn voor coole science-fictionfictie, maar het betekent wel dat we nu tijd uitdrukken in afstand. En dus labelen we de y -as met ct , zoals getoond wordt in Figuur 8(a).

Welnu, om het tweede probleem bij de horens te vatten, waarbij natuurkundigen met deeltjes werken waarvan de botsende bewegingen de lichtsnelheid naderen op afstandsschalen kleiner dan een elektron in de buurt van zwarte gaten met krachten groter dan je ooit zal tegenkomen, blijft het onpraktisch om te werken met normale afstands- en tijdeenheden. Sterker nog, hun voorkeur gaat uit naar eenheden van ct en x die maken dat een ‘lijn’ van een foton, dat wil zeggen, licht, zich voortplantend door ruimte en tijd, altijd weergegeven wordt met een hoek van $\pi/4$ of 45° met de x -as. Om dit te bewerkstelligen, stellen ze de snelheid van het licht op 1. Dus, $c = 1$. Wat je hiermee verkrijgt, is een diagram zoals weergegeven in Figuur 8(b).



Figuur 8: (a) De tijdas is vermenigvuldigd met c , dus het is makkelijker om te vergelijken met ruimte, d.i. tijd is uitgedrukt in afstandseenheden. (b) We stellen $c = 1$ opdat de zogenaamde wereldlijn van ieder deeltje dat zich met exact de lichtsnelheid verplaatst altijd een hoek maakt van $\pi/4$ met de x -as. Of 45° , als je dat leuker vindt.

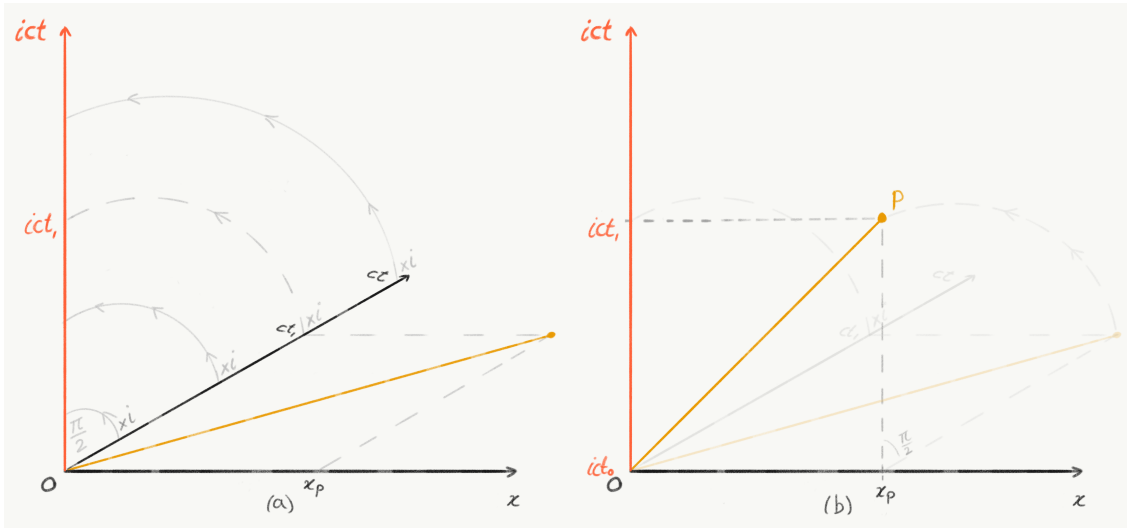
Deeltje P is een foton, die zich dus voortbeweegt met de lichtsnelheid. Hierdoor maakt zijn ‘lijn’ dus een hoek van exact $\pi/4$ radialen met zowel de x - als de y -as, oftewel respectievelijk x en ct . Alle andere deeltjes bewegen zich dus voort met een bepaalde fractie van de snelheid van c , een bepaalde fractie van 1.

Dit alles zou voldoende moeten zijn om uit te vogelen hoe snel een deeltje moet zijn als zijn ‘lijn’ onder die van P getekend zou worden, oftewel onder een hoek kleiner dan $\pi/4$. En hoewel je in staat zou zijn om te concluderen of dit überhaupt mogelijk is, vertellen we je nu al dat dit niet zo is.

Overigens, de term ‘lijn’, die we gebruikten om het pad van een deeltje door ruimte en tijd in onze diagrammen mee aan te duiden, wordt eigenlijk ‘wereldlijn’ genoemd, zoals Hermann Minkowski dat gewild zou hebben. En de diagrammen in de Figuren 7 en 8 worden, ter ere van hem, minkowski-diagrammen genoemd. Ze worden overigens ook wel eens ruimtetijddiagrammen genoemd, maar er is een subtiel verschil: minkowski-diagrammen zijn de subset van tweedimensionale diagrammen binnen de grotere set ruimtetijddiagrammen, die 3D- en zelfs 4D-versies bevat.

4.4 Opnieuw Wick-rotatie

We zijn bijna klaar om de lorentztransformaties af te leiden. Het enige dat we nog moeten doen, is de reële tijdas te Wick-roteren naar de imaginaire tijdas, oftewel, we roteren de ct -as in Figuur 8. Dus, we doen zoals we deden in paragraaf 4.1: we vermenigvuldigen met de imaginaire eenheid i van de getallenverzameling $\mathbb{C}$, waardoor we de tijdas van $\mathbb{R}$ in het complexe vlak $\mathbb{C}$ roteren waarmee het een imaginaire tijdas wordt.



Figuur 9: (a) De Wick-rotatie van de reële tijdas ct naar de imaginaire tijdas ict . We projecteerden het coördinatenstelsel van Figuur 8 ‘op de vloer’ om vervolgens de ct -as te draaien naar de imaginaire ict -as door middel van vermenigvuldiging met de imaginaire eenheid i . (b) Het gevolg is dat de wereldlijn van P ook geroteerd wordt naar het complexe vlak.

Figuur 9 biedt een geometrische representatie van de hele operatie. We projecteerden ons originele coördinatenstelsel van Figuur 8 ‘op de vloer’, zogezegd. We hebben deeltjes Q , R , en S weggelaten om het leesbaar te houden. De Wick-rotatie van de reële tijdas ct door vermenigvuldiging met de imaginaire eenheid i levert de imaginaire tijdas ict op. De wereldlijn P wordt automatisch meegeroteerd naar het complexe vlak. Merk op dat de ruimtetijdcoördinaten van P een aantal keer veranderd zijn in dit hoofdstuk. Ze begonnen als (x_P, t_1) , werden toen (x_P, ct_1) en eindigden als (x_P, ict_1) . Dat laatste precies zoals de bedoeling is.

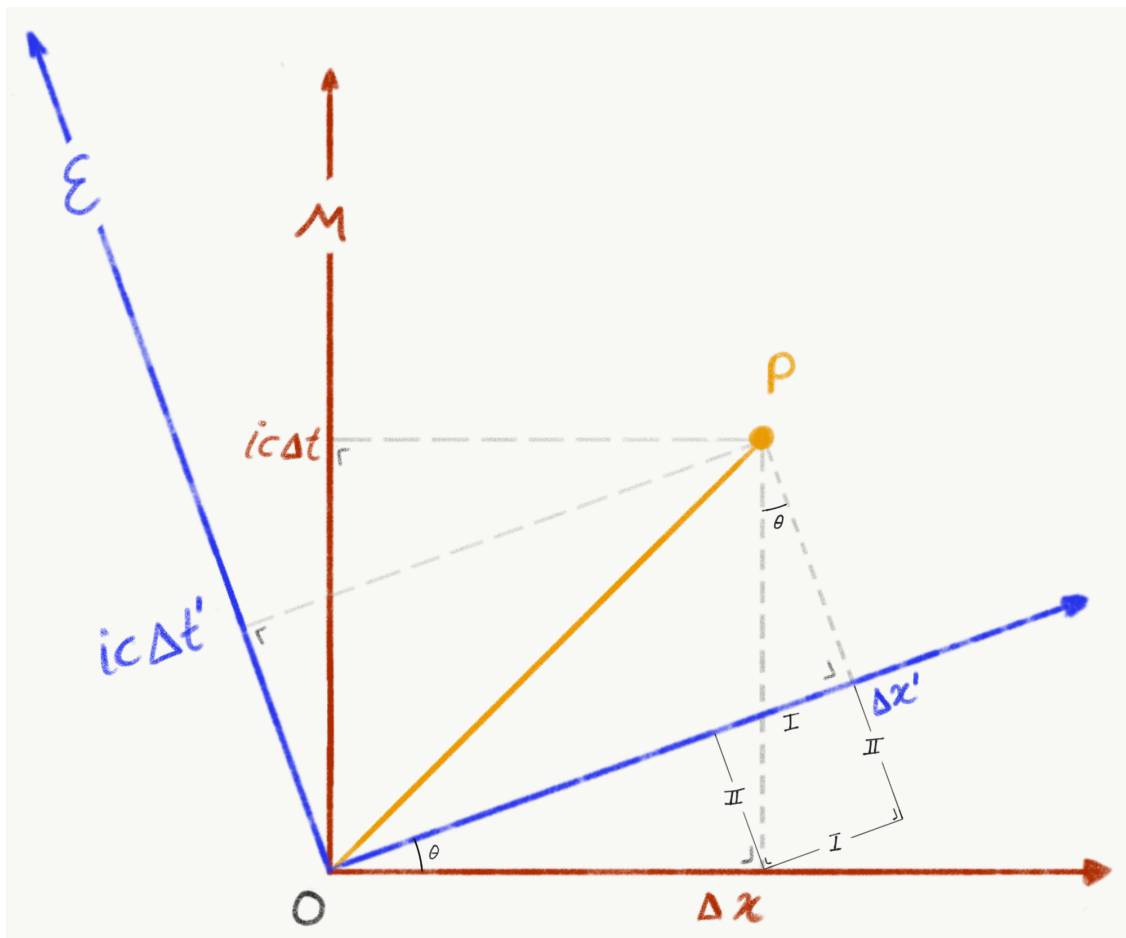
5 Afleiding van de lorentztransformaties

5.1 Invariante wereldlijn in het complexe vlak

Om aan het eind de lorentztransformaties te verkrijgen zoals geformuleerd in vergelijkingen (1) en (1) door twee referentiekaders ten opzichte van elkaar te roteren in het complexe vlak—met een imaginaire tijdas—refereren we aan Figuur 10.

Door beide kaders, die van Hermann en Albert, beweegt een foton zich voort met snelheid c . Door het tweede postulaat van Einsteins speciale relativiteitstheorie (Einstein, 1905) weten we dat, op een of andere manier, de waarde van c , dat hier is gesteld op 1, dezelfde is in beide referentiekaders, hoewel de een ten opzichte van de ander beweegt, waardoor de coördinaten van de twee kaders ongelijk zijn. In Figuur 2 wordt dit gerepresenteerd door v . In Figuur 10 is dit weergegeven als een hoek θ .

We zien dat de coördinaten van P in $\mathcal{M}$ zijn: $(\Delta x, ic\Delta t)$. In $\mathcal{E}$ zijn ze echter $(\Delta x', ic\Delta t')$. Deze zijn verbonden met elkaar via een bepaalde proportie van hoek



Figuur 10: Hermanns $\mathcal{M}$ en Alberts $\mathcal{E}$ referentiekaders zijn ten opzichte van elkaar om hun oorsprong geroteerd onder hoek θ in het complexe vlak. We hebben een hulpvierkantje ingevoegd met zijden I en II om ons te assisteren bij de trigonometrische berekeningen.

θ . Voordat we deze relatie deduceren, herhalen we onze bevinding betreffende vergelijking (3) in hoofdstuk 3: de kwantiteit $(\Delta x)^2 - (c\Delta t)^2$ is invariant. In ons geval is het OP die invariant is, ondanks dat P verschillende coördinaten heeft. Met andere woorden, geometrisch, zowel $\mathcal{M}$ en $\mathcal{E}$ zijn in overeenstemming over de lengte van de gele wereldlijn zoals te zien is in Figuur 10. We zullen we moeten aantonen.

Laten we eerst de formulering voor de invariante gele wereldlijn OP opschrijven in beide referentiekaders:

$$\begin{aligned}\text{Hermann, staand in } \mathcal{M}, \text{ zegt: } (OP)^2 &= (\Delta x)^2 + (ic\Delta t)^2, \\ \text{Albert, staand in } \mathcal{E}, \text{ zegt: } (OP)^2 &= (\Delta x')^2 + (ic\Delta t')^2.\end{aligned}$$

En omdat beide formuleringen uiteraard dezelfde invariante kwantiteit betreft, kunnen we schrijven:

$$(\Delta x)^2 + (ic\Delta t)^2 = (\Delta x')^2 + (ic\Delta t')^2,$$

wat we simplificeren tot

$$\Delta x^2 - c^2\Delta t^2 = (\Delta x')^2 - c^2(\Delta t')^2.$$

Dit is het gewenste resultaat. Of je nu met imaginaire tijd of met reële tijd werkt, de kwantiteit $\Delta x^2 - c^2\Delta t^2$ blijft invariant. (Niet vergeten: $i^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$.) Zelfs in het complexe vlak blijven $\mathcal{M}$ en $\mathcal{E}$ in overeenstemming over de grootte.

5.2 Coördinaten uitgedrukt met andere coördinaten

Laten we nu de coördinaten van P in $\mathcal{E}$, oftewel $(\Delta x', ic\Delta t')$, uitdrukken in de hoek θ en de coördinaten van P in $\mathcal{M}$, oftewel $(\Delta x, ic\Delta t)$. Ten eerste deduceren we een formulering voor $\Delta x'$ met hulp van Figuur 10:

$$\begin{aligned}\Delta x' &= \Delta x \cos \theta + \text{I}, \\ \text{I} &= ic\Delta t \sin \theta, \\ \therefore \Delta x' &= \Delta x \cos \theta + ic\Delta t \sin \theta.\end{aligned}\tag{7}$$

Ten tweede deduceren we een uitdrukking voor $ic\Delta t'$:

$$\begin{aligned}ic\Delta t' &= ic\Delta t \cos \theta - \text{II}, \\ \text{II} &= \Delta x \sin \theta, \\ \therefore ic\Delta t' &= ic\Delta t \cos \theta - \Delta x \sin \theta.\end{aligned}\tag{8}$$

Ten slotte, als we de relatie tussen θ in het complexe vlak en v in de reële ruimtetijd willen vinden, vergeten we P voor dit moment en schrijven we nu een uitdrukking op voor Albert Einstein zelve, zittend in O' van zijn referentiekader $\mathcal{E}$ (de auto), uitgedrukt in de coördinaten van Hermanns referentiekader $\mathcal{M}$. Met andere woorden, hoe ziet Hermann Albert bewegen? Aangezien Albert zich niet beweegt ten opzichte van zijn eigen referentiekader $\mathcal{E}$, zoals we eerder zeiden, zal, na een zekere hoeveelheid tijd $ic\Delta t$, zijn $\Delta x' = 0$. Dus, met vergelijking (5.2), schrijven we

$$\Delta x' = \Delta x \cos \theta + ic\Delta t \sin \theta = 0.$$

Verder uitgewerkt, levert

$$\begin{aligned} ic\Delta t \sin \theta &= -\Delta x \cos \theta, \\ \frac{\sin \theta}{\cos \theta} &= -\frac{\Delta x}{ic\Delta t}, \\ \tan \theta &= -\frac{1}{ic} \frac{\Delta x}{\Delta t}, \\ \tan \theta &= -\frac{1}{ic} v, \\ \tan \theta &= -\frac{v}{ic}. \end{aligned}$$

Om de imaginaire eenheid—die een onmeetbare wortel is—uit de noemer te verwijderen, vermenigvuldigen we de uitdrukking rechts van het is-gelijk-teken met i/i , wat oplevert:

$$\begin{aligned} \tan \theta &= -\frac{i}{i} \frac{v}{ic}, \\ \tan \theta &= -i \frac{v}{-c}, \\ \therefore \tan \theta &= \frac{iv}{c}. \end{aligned} \tag{9}$$

Samengevat hebben we nu de vergelijkingen (5.2), (5.2) verkregen, die de coördinaten van P in $\mathcal{E}$ uitdrukken in de hoek θ en de coördinaten van $\mathcal{M}$. Ten slotte, we hebben de relatie (5.2) tussen hoek θ en snelheid v van Alberts kader $\mathcal{E}$ verkregen, zoals gezien door Hermann in zijn kader $\mathcal{M}$. Dus, herhalend, hebben we de volgende transformaties:

$$\begin{cases} \Delta x' = \Delta x \cos \theta + ic\Delta t \sin \theta, & (5.2) \\ ic\Delta t' = ic\Delta t \cos \theta - \Delta x \sin \theta, & (5.2) \\ \tan \theta = \frac{iv}{c}. & (5.2) \end{cases}$$

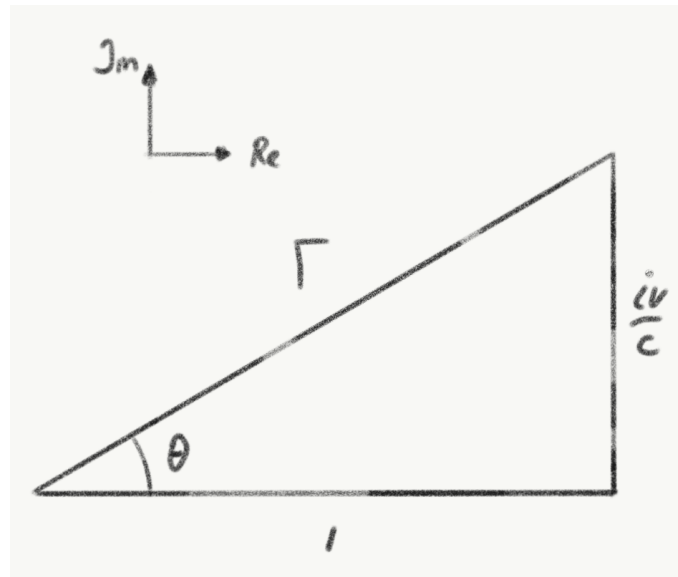
5.3 De lorentztransformaties

Merk op dat het algebraïsch mogelijk is om vergelijking (5.2) als

$$\tan \theta = \frac{iv/c}{1},$$

te schrijven, wat geometrisch hetzelfde is als Figuur 11. Merk op dat $\sin \theta = (iv/c)/\Gamma$ en $\cos \theta = 1/\Gamma$, dus alles dat we nu nog hoeven te doen, is te deduceren wat Γ is. Gebruikmakend van wederom de stelling van Pythagoras:

$$\begin{aligned} \Gamma^2 &= 1^2 + \left(\frac{iv}{c}\right)^2, \\ &= 1 + \frac{-v^2}{c^2}, \\ \therefore \Gamma &= \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \end{aligned}$$



Figuur 11: De geometrische representatie van vergelijking (5.2): een imaginaire driehoek met een imaginaire helling $\tan \theta$, waarbij Γ de hypotenusa is. Merk op dat $\sin \theta = (iv/c)/\Gamma$ en $\cos \theta = 1/\Gamma$.

We kunnen nu schrijven:

$$\sin \theta = \frac{iv/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Dit begint erop te lijken. We substitueren nu $\sin \theta$ en $\cos \theta$ in vergelijking (5.2), wat oplevert:

$$\begin{aligned} \Delta x' &= \Delta x \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) + ic\Delta t \left(\frac{iv/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right), \\ &= \frac{\Delta x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} + \frac{-v\Delta t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \\ \therefore \Delta x' &= \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \end{aligned}$$

Aangezien onze configuratie de afstandsverschillen worden berekend met de oorsprong, kunnen we het Δ -teken weglaten, waardoor we slechts de coördinaten gebruiken en dus verkrijgen we

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

wat inderdaad vergelijking (1) is.

Substitutie van $\sin \theta$ en $\cos \theta$ in vergelijking (5.2) levert:

$$\begin{aligned} ic\Delta t' &= ic\Delta t \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) - \Delta x \left(\frac{iv/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right), \\ ic\Delta t' &= \frac{ic\Delta t}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \frac{iv\Delta x/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \\ \Delta t' &= \frac{\Delta t}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - \frac{v\Delta x/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \\ \therefore \Delta t' &= \frac{\Delta t - v\Delta x/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \end{aligned}$$

En dus, het Δ -teken weglatend, gebruikmakend van enkel de coördinaten, verkrijgen we

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

wat, inderdaad, vergelijking (1) is.

Het is wel belangrijk nog op te merken dat, hoewel het niet ongebruikelijk is het Δ -teken weg te laten voor het gemak, het formeel incorrect is: er is in de speciale relativiteitstheorie geen voorkeur voor een (vaste) oorsprong, dus het blijft eigenlijk altijd gaan om *verschillen*.

Ten slotte, het is het opmerken waard dat de term $1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ vaak wordt aangeduid met γ en de lorentzfactor wordt genoemd. In sommige boeken en artikelen wordt de term v/c vervangen door het symbool β , wat de volgende vorm geeft aan de lorentztransformaties:

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta x), \\ x' &= \gamma(x - \beta ct), \\ y' &= y, \\ z' &= z. \end{aligned}$$

Dankzij de verbeelding van vele wiskundigen en natuurkundigen voor ons, is ons vermogen om te onderzoeken, te analyseren en te berekenen niet slechts denkbeeldig, en net zo soepel en kneedbaar als, inderdaad, het weefsel van de kosmos.

Referenties

- Bailey, D. H. (2016). *Pi : the next generation : a sourcebook on the recent history of Pi and its computation*, Switzerland : Springer.
- Cooke, R. (2013). *The history of mathematics : a brief course*, 3rd ed. edn, Hoboken, New Jersey : Wiley.
- Einstein, A. (1905). Zur Elektrodynamik bewegter Körper, *Annalen der Physik* **322**(10): 891–921.
- Hawking, S. (2001). The Universe in a nutshell.
- Sandro, C. (2006). On the Common Origin of Some of the Works on the Geometrical Interpretation of Complex Numbers, in K. Williams (ed.), *Two Cultures: Essays in Honour of David Speiser*, Basel: Birkhäuser Basel, Basel, pp. 139–151.
- Walter, S. (2014). Poincaré on clocks in motion, *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics* **47**: 131–141.
URL: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S1355219814000136>
- Wick, G. C. (1954). Properties of Bethe-Salpeter Wave Functions, *Physical Review* **96**(4): 1124–1134.
URL: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.96.1124>