

OPENCURVE

A BIT OF MATHS AND PHYSICS. AND EVERY BIT FOR EVERYONE.

REËELE EIGENWAARDEN EN EIGENVECTOREN VAN 3×3 -MATRICES, VOORBEELD 1

by @kjrnia

2018-11-28

In deze serie voorbeelden hebben we te maken met matrices waarvan de eigenwaarden reële waarden blijken te zijn. Oftewel, de eigenwaarden en de eigenvectoren bevinden zich in $\mathbb{R}^n$.

Stel, de volgende matrix is gegeven:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

De opdracht is om de eigenwaarden en de bijbehorende eigenvectoren te berekenen.

Stap 1. Karakteristieke vergelijking

Stel eerst de karakteristieke vergelijking op en los deze vervolgens op. De gevonden oplossingen zijn de eigenwaarden van matrix $\mathbf{A}$. Als $\mathbf{I}$ de eenheidsmatrix (ook wel identiteitsmatrix) is van $\mathbf{A}$ en λ de te vinden eigenwaarde(n), dan is de karakteristieke vergelijking:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0.$$

Als we die opschrijven in matrixvorm, verkrijgen we

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (1)$$

Kies de makkelijkste rij of kolom om de determinant van de matrix van vergelijking (1) te berekenen. Oftewel, begin hier met het eerste element van de eerste rij, $5 - \lambda$. Deze rij bevat namelijk voor de rest nullen, wat de lengte van de karakteristieke vergelijking danig zal verkorten:

$$\begin{aligned} & (5 - \lambda) \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} \\ & - 0 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} \\ & + 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 - \lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \end{aligned}$$

en dus

$$(5 - \lambda) \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

Als we dit verder uitwerken, verkrijgen we

$$\begin{aligned} (5 - \lambda)[(2 - \lambda)(2 - \lambda) - (1)(1)] &= 0, \\ (5 - \lambda)[4 - 2\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 1] &= 0, \\ (5 - \lambda)[\lambda^2 - 4\lambda + 3] &= 0, \end{aligned}$$

waardoor we een hanteerbaardere vorm van de karakteristieke vergelijking hebben gevonden:

$$(5 - \lambda)[(\lambda - 1)(\lambda - 3)] = 0, \quad (3)$$

waarvan de oplossingen van λ vervolgens makkelijk af te lezen zijn:

$$\therefore \lambda = 5 \vee \lambda = 1 \vee \lambda = 3. \quad (4)$$

We kunnen ten slotte nog twee controles uitvoeren. De som van de gevonden waarden moet gelijk zijn aan de spoor, of trace, van $\mathbf{A}$, oftewel, de som van de hoofddiagonaal van $\mathbf{A}$:

$$\text{tr } \mathbf{A} = 5 + 2 + 2 = 9.$$

En inderdaad is ook de som van de gevonden waarden van λ gelijk aan 9. Ten slotte kunnen we nog controleren of het product van de gevonden waarden gelijk is aan $\det \mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} &= 5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 5 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 5(2 \cdot 2 - 1 \cdot 1) \\ &= 15. \end{aligned}$$

En inderdaad is ook het product van de gevonden waarden van λ gelijk aan $5 \cdot 1 \cdot 3 = 15$.

Stap 2. Benoem de eigenwaarden

De eigenwaarden van matrix $\mathbf{A}$ zijn dus $\lambda = 1$, $\lambda = 3$ en $\lambda = 5$.

Stap 3. Eigenvectorvergelijkingen

We herschrijven nu de karakteristieke vergelijking in matrixvorm naar een stelsel van drie lineaire vergelijkingen. Omdat het de bedoeling is dat we een (of meer) eigenvector(en) $\mathbf{v}$ gaan vinden, stel dan dat

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (5)$$

en dat

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (6)$$

In dat geval schrijven we

$$\begin{pmatrix} 5 - \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}, \quad (7)$$

wat we vervolgens als een stelsel van drie lineaire vergelijkingen kunnen opstellen:

$$\begin{cases} (5 - \lambda)x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0, \\ x_1 + (2 - \lambda)x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + (2 - \lambda)x_3 = 0. \end{cases}$$

Als we dit nog enigszins vereenvoudigen, hebben we de volgende eigenvectorvergelijkingen verkregen:

$$\begin{cases} (5 - \lambda)x_1 = 0, \\ x_1 + (2 - \lambda)x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + (2 - \lambda)x_3 = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Stap 4. Substitueer elke verkregen eigenwaarde λ in de eigenvectorvergelijkingen

Eigenwaarde $\lambda = 1$

Laten we beginnen met eigenwaarde $\lambda = 1$. Als we dit in eigenvectorvergelijkingen (8) substitueren, verkrijgen we

$$\begin{aligned} (5 - 1)x_1 &= 0, \\ x_1 + (2 - 1)x_2 + x_3 &= 0, \\ x_1 + x_2 + (2 - 1)x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Dat kunnen we vereenvoudigen tot

$$\begin{aligned} 4x_1 &= 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Van de eerste vergelijking blijft weinig over: $x_1 = 0$ is de enige oplossing. De andere twee vergelijkingen zijn hetzelfde. En omdat $x_1 = 0$, reduceren die tot een enkele $x_2 = -x_3$, met andere woorden, als $x_3 = 1$, dan is $x_2 = -1$. We kunnen nu dus de waarden van $\mathbf{v}$ in (5) invullen:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Met andere woorden, een eigenvector bij de eigenwaarde $\lambda = 1$ is $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T$. (Noot: we schrijven hier met opzet een eigenvector, aangezien bijvoorbeeld de eigenvector $\begin{pmatrix} 0 & -13 & 13 \end{pmatrix}^T$ ook een eigenvector is bij deze eigenwaarde. Zolang $x_2 = -x_3$, met andere woorden, zolang de verhouding tussen x_2 en x_3 maar onveranderd blijft, is het een eigenvector die bij deze eigenwaarde hoort. De conventie is echter om de laagst mogelijke waarden te hanteren.)

Dit kunnen we nog controleren door het inwendig product van $\mathbf{A}$ met de eigenvector te berekenen. Als het goed is, verkrijgen we het inwendige product met dezelfde eigenvector als resultaat, oftewel, $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Als we dit uitschrijven in matrixnotatie (waarbij we voor de duidelijkheid aangeven welk deel welke variabele is), verkrijgen we inderdaad

$$\begin{aligned} & \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \cdot 0 + 0 \cdot -1 + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 + 2 \cdot -1 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 + 1 \cdot -1 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{1}_{\lambda} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}}. \end{aligned}$$

Eigenwaarde $\lambda = 3$

Op dezelfde manier vervangen we $\lambda = 3$ in de eigenvectorvergelijkingen van (8). We schrijven dan de volgende drie lineaire vergelijkingen op:

$$\begin{aligned} (5 - 3)x_1 &= 0, \\ x_1 + (2 - 3)x_2 + x_3 &= 0, \\ x_1 + x_2 + (2 - 3)x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Die kunnen we verder uitwerken:

$$\begin{aligned} 2x_1 &= 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Ook hier levert de eerste vergelijking $x_1 = 0$ op. De tweede en de derde vergelijking zijn dan allebei te reduceren tot $x_2 = x_3$, oftewel, als $x_3 = 1$, dan $x_2 = 1$. Een eigenvector die bij eigenwaarde $\lambda = 3$ hoort, is dan ook simpelweg $(0 \ 1 \ 1)^T$. Als we dit checken met behulp van het inwendig product van matrix $\mathbf{A}$ met $(0 \ 1 \ 1)^T$, verkrijgen we inderdaad $\lambda \mathbf{v}$:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \cdot 0 + 0 \cdot -1 + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 + 2 \cdot -1 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 + 1 \cdot -1 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Eigenwaarde $\lambda = 5$

Vullen we $\lambda = 5$ in, dan verkrijgen we

$$\begin{aligned} (5 - 5)x_1 &= 0, \\ x_1 + (2 - 5)x_2 + x_3 &= 0, \\ x_1 + x_2 + (2 - 5)x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Dit kunnen we verder uitwerken:

$$\begin{aligned} 0x_1 &= 0, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 &= 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 &= 0. \end{aligned}$$

De eerste vergelijking reduceert tot $0 = 0$, dat is een andere manier om te zeggen dat x_1 logischerwijs elke waarde kan aannemen als oplossing voor die vergelijking. Als we ook de andere vergelijkingen verder uitwerken, krijgen we

$$\begin{aligned} 0 &= 0, \\ x_3 &= 3x_2 - x_1, \\ x_2 &= 3x_3 - x_1. \end{aligned}$$

De laatste twee vergelijkingen vergen nog wat nadere uitwerking. Als we de tweede vergelijking in de derde substitueren, verkrijgen we

$$\begin{aligned}x_2 &= 3(3x_2 - x_1) - x_1, \\x_2 &= 9x_2 - 3x_1 - x_1, \\8x_2 &= -4x_1, \\x_2 &= -\frac{x_1}{2}.\end{aligned}$$

Als we dit resultaat in de tweede vergelijking substitueren, verkrijgen we

$$\begin{aligned}x_3 &= 3\left(-\frac{x_1}{2}\right) - x_1, \\x_3 &= -\frac{3x_1}{2} - x_1, \\x_3 &= -\frac{5x_1}{2}.\end{aligned}$$

En dus concluderen we dat

$$\frac{1}{2}x_1 = x_2 = x_3. \quad (10)$$

Een eigenvector die bij eigenwaarde $\lambda = 5$ hoort, is dus $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$. Uiteraard kunnen we dit ook controleren:

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} 5 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} \\&= \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

dus dat klopt.