
OPENCURVE

A BIT OF MATHS AND PHYSICS. FOR EVERYONE.

HET RAADSEL VAN DE VERJAARDAGEN

door @kjrnia
2019-01-25



Kansen zijn soms moeilijk te vatten. Wat is bijvoorbeeld de kans dat er onder de genodigden van een verjaardagsfeestje zich twee of meer mensen bevinden die op dezelfde dag jarig zijn? Misschien groter dan je denkt.

Mijn moeder is sinds haar geboorte jaarlijks op 1 januari jarig. Dit jaar vierde ze haar twaalfde kroonjaar in een gezellig zaaltje met een groepje van ongeveer vijftig mensen.

Feestnummer die ik ben, legde ik tijdens mijn praatje de genodigden voor dat de kans dat mijn moeder op 1 januari geboren werd gelijk was aan $1/365$. Aangezien de meeste jaren bestaan uit 365 dagen, liet ik de schrikkeljaren geheel buiten beschouwing. Ik ging ook uit van een gelijkmatige verdeling der verjaardagen over een jaar, omdat het makkelijker rekenen is.

Vervolgens vroeg ik hen wat de kans was dat mijn vader op 8 juli geboren zou worden (dat is hij), als er dus 365 dagen waren om uit te kiezen. Het antwoord was wederom, 1 van de 365, oftewel $1/365$. Zo beschouwd is een specifieke dag natuurlijk

niet specialer dan een andere specifieke dag, afgezien van de culturele betekenis die we sommige dagen geven.

Toen kwam de vraag: wat is de kans dat er twee of meer mensen in deze zaal op dezelfde dag jarig zijn? Uiteraard los van het jaartal. Het ging puur om de dag van het jaar.

Met andere woorden, er zitten 365 dagen in een jaar en we hebben 50 mensen wiens verjaardagen verspreid zijn over die 365 dagen. Hoe groot is de kans dat er toch twee (of meer) verjaardagen op dezelfde dag vallen?



Hier verhoog ik de feestvreugde door tijdens mijn praatje een wiskunderaadsel ter tafel te brengen.

Soms denkt men daarbij aan het voorbeeld met de dobbelstenen. Stel, je hebt twee dobbelstenen. De kans dat je een zes gooit, is $1/6$. De kans dat je met de andere dobbelsteen een zes gooit is ook $1/6$. De kans dat je met beide dobbelstenen zessen gooit, is dus $1/6 \times 1/6 = 1/36$. Die kans is logischerwijs kleiner dan wanneer je met één dobbelsteen een zes gooit. (Lees ook Wanneer en waarom vermenigvuldig je kansen met elkaar?) Veel mensen redeneren dat de kans dat twee mensen op bijvoorbeeld 8 juli jarig zijn daarom gelijk is aan $1/365 \times 1/365 = 1/133225$; dat is een heel kleine kans dus. En dat zou dan kunnen kloppen met veler intuïtie: het zou toch wel heel toevallig zijn als er twee mensen op dezelfde dag jarig zijn in een groepje van vijftig. Toch?

Anderen denken aan 50 knikkers in een pot met 365 knikkers. Je trekt een knikker uit de pot en legt hem weer terug. Je schudt de pot. Je trek weer een knikker uit de pot; wat is de kans dat je dezelfde knikker trekt? Zo komt men op het antwoord van $50/365$.

Maar nee, beide strategieën zijn onjuist. In werkelijkheid is de kans 97%, afgerond op de nabije gehele procent. Ik zou er dus een goede fles wijn om willen wedden.

De berekening

Zoals heel vaak in de wiskunde is het makkelijker om de *tegenovergestelde* situatie te bestuderen. Laten we dat hier ook doen. De tegenovergestelde situatie is dat van de groep *niemand* op dezelfde dag jarig is. Hoe groot is die kans?

We hebben 365 dagen. We hebben 50 mensen. Wat is de kans dat mens nummer 1 in de groep op *een* dag in het jaar jarig is? Let op de vraagstelling. *Een* dag, niet een *specifieke* dag. We vragen ons dus niet af wat de kans is om op bijvoorbeeld 8 juli jarig te zijn. We vragen ons af wat de kans is dat zij op één van de 365 dagen jarig is. Die kans is 365 van de 365 dagen, oftewel $365/365$, oftewel $365 : 365 = 1$, oftewel 100%.

Wat is nu de kans dat mens nummer 2 van die groep op *een* dag in het jaar jarig is, maar *niet dezelfde* als die van mens nummer 1? Dat betekent dus dat mens nummer 2 op één dag minder jarig kan zijn. Mens nummer 2 kan dus maar op 364 van de 365 dagen jarig zijn – anders zouden beiden op dezelfde dag jarig kunnen zijn. Dus de kans dat mens nummer 2 op *een andere* dag jarig is, is 364 van de 365, oftewel $364/365$, oftewel $364 : 365 = 0,997\dots$, oftewel 99,7%.

Wat is dus de kans dat beiden op een andere dag jarig zijn? Dat is

$$\frac{365}{365} \times \frac{364}{365} = 1 \times 0,997\dots = 0,997\dots,$$

oftewel 100% als we afronden naar boven. Anders gezegd, de kans is praktisch nihil dat ze op dezelfde dag jarig zijn.

Maar wat als we een derde mens erbij betrekken? Wat is de kans dat mens nummer 3 op een andere dag dan die van mensen nummer 1 en 2 jarig is? Dat is 363 van de 365, oftewel $363/365$, oftewel $363 : 365 = 0,994\dots$, oftewel 99,4%. En wat is dus de kans dat mensen nummer 1, 2 en 3 ieder op een andere dag jarig zijn? Dat is dan

$$\frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} = \frac{132132}{133225} = 0,991\dots,$$

oftewel 99%, afgerond.

Laten we voor de duidelijkheid nog een mens erbij betrekken, een vierde. De kans dat mens nummer 4 op een andere dag dan die van mensen nummers 1, 2 en 3 jarig is, is $362/365$, oftewel $362 : 365 = 0,991\dots$. En wat is dus de kans dat mensen nummers 1, 2, 3 en 4 ieder op een andere dag jarig zijn? Dat is dan

$$\frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \frac{362}{365} = \frac{47831784}{48627125} = 0,983\dots,$$

oftewel 98%, afgerond. We zien dus dat de kans dat alle mensen op een andere dag jarig zijn met toevoeging van telkens wat extra mensen afneemt.

Stel nu dat we dit tot en met mens nummer 50 zouden blijven doen. De kans dat mens nummer 50 op geen van de dagen van haar voorgangers jarig is, wordt dan $316/365$. Dus de kans dat *alle* vijftig mensen op een *andere* dag jarig zijn, berekenen we dan als volgt:

$$\frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \frac{363}{365} \times \frac{362}{365} \times \dots \times \frac{317}{365} \times \frac{316}{365} = 0,029\dots,$$

oftewel nog maar 2,9%!

Dan hebben we nu ons antwoord. De *omgekeerde situatie*, de kans dat *niet alle* vijftig mensen op een andere dag jarig zijn, is dan het omgekeerde van 2,9% en dat is 97,1%. Oftewel, 97% afgerond.

Onder de vijftig verjaardagsgangers bleken trouwens maar liefst zes mensen een verjaardag met iemand te delen. Met andere woorden, we vonden drie ‘koppels’ met dezelfde verjaardag.

Trouwens, bij een groep van 23 mensen is de kans al 0,504 (dus iets meer dan 50%) dat er twee mensen tussen zitten die op dezelfde dag jarig zijn. De kansen groeien rap.

Mocht je er meer over willen weten, dit fenomeen berust op het zogenaamde duiventilprincipe of het ladenprincipe van Dirichlet – het werd waarschijnlijk voor het eerst formeel geformuleerd door deze negentiende eeuwse, Duitse wiskundige.

Foto van de verjaardagstaart afkomstig van Will Clayton onder CC BY 2.0.