
OPENCURVE

A BIT OF MATHS AND PHYSICS. FOR EVERYONE.

MIN EN MIN EN MIN KEER MIN

door @kjrnia
2019-02-25

Min en min is plus. En min keer min is ook plus. Deze uitspraken zul je misschien een paar keer hebben gehoord of zelf hebben geuit. Hoewel je het vast al wist, hier vind je een algebraïsch bewijs om er nog eens op na te slaan. Benodigd: algebra van de tweede klas van de middelbare school.



Min en min is plus

We zouden allemaal geleerd moeten hebben op de middelbare school dat het aftrekken van een negatief getal hetzelfde is als het optellen van de positieve variant van dat getal. Bijvoorbeeld:

$$1 - (-2) = 1 + 2 = 3.$$

In de menselijke, Nederlandse taal klinkt het ongeveer als: 'Eén min min twee is gelijk aan één plus twee is gelijk aan drie'.

Als we variabelen gebruiken in plaats van getallen kunnen we dit opschrijven als

$$a - (-b) = a + b,$$

waarbij a en b reële getallen zijn.

Nou, laten we dat gaan bewijzen. Of toch niet...? Nee, nog niet. Laten we eerst doen alsof het *tegenovergestelde* waar is. Stel,

$$a - (-b) = a - b.$$

Als we a van beide zijden aftrekken, houden we over:

$$-(-b) = -b.$$

Puur om het wat duidelijker te maken, zetten we ook wat haakjes om de $-b$ aan de rechterkant:

$$-(-b) = (-b).$$

Nu zie je duidelijk: de vergelijking is in tegenspraak met zichzelf. Voor het geval het nog niet duidelijk is: stel, $(-b) = c$, dus als we $(-b)$ vervangen door c , krijgen we

$$-c = c.$$

En dat is, overduidelijk, in dit universum, uiterst belachelijk. Immers, $-1 = 1$? Dacht het dus niet. Dus, onze oorspronkelijke bewering moet kloppen. Chin-chin, pour the glasses.

Min keer min is plus

We leerden ook op de middelbare school dat het vermenigvuldigen van een negatief getal met een ander negatief getal een of ander positieve getal is. Dus we zullen bewijzen dat

$$(-a) \times (-b) = a \times b,$$

waarbij a en b reële getallen zijn. (Ik plaatste haakjes om de negatieve getallen $-a$ en $-b$ om de leesbaarheid te vergroten, niet omdat ze andere, extra informatie representeren of omdat ze een later invallende, literair-narratieve gedachte zijn, zoals deze zin.)

Wiskundigen zijn ware meesters der vermenigvuldiging van bijna alles bijna altijd en er daarbij zelfs in slagen voor betaald te worden. Ze kunnen bij tijd en wijle behoorlijk productief zijn. Dus vanzelfsprekend, opdat de werkgever waar krijgt voor haar geld, zullen ze bijna nooit de moeite nemen om het ‘ $\times$ ’-teken fatsoenlijk op te schrijven. Vandaar dat we bovenstaande vergelijking hieronder als een professional opschrijven:

$$(-a)(-b) = ab.$$

Het volgende kan voor de hand liggend lijken, maar heb geduld, het is slechts de eerste stap. Laten we kijken naar de volgende tautologie:

$$(-a)(-b) = (-a)(-b).$$

Okay, tot zover de tocht via deze open deur. Laten we een term toevoegen zonder de essentie van de vergelijking te verstoren:

$$(-a)(-b) = (-a)(-b) + 0.$$

Nog steeds een waarheid als een koe. Wat ook als een koe is: alles dat vermenigvuldigd wordt met nul is gelijk aan nul. Dus, we kunnen de vergelijking herschrijven als

$$(-a)(-b) = (-a)(-b) + a \times 0,$$

wat we, om lekker pedant over de notatie te doen, op een compactere manier kunnen schrijven als

$$(-a)(-b) = (-a)(-b) + a(0).$$

Laten we het getal 0 vervangen door variabelen – om precies te zijn, alleen de variabelen die we hier gebruiken. Dus, zeg...

$$(-a)(-b) = (-a)(-b) + a \underbrace{(b - b)}_{=0}.$$

Laten we nu de haakjes van de laatste expressie na het ‘+’-teken weg te werken.

$$(-a)(-b) = (-a)(-b) + ab + a(-b).$$

Laten we nu de volgorde van de laatste twee termen omdraaien. Dat maakt de volgende stap iets makkelijker. Dus, de termen omdraaiend, krijgen we

$$(-a)(-b) = (-a)(-b) + a(-b) + ab.$$

Nu kunnen op ons gemak naar de eerste twee termen kijken:

$$(-a)(-b) = \underbrace{(-a)(-b) + a(-b)}_{\text{kijk hier naar, op ons gemak}} + ab.$$

Weet je nog hoe je moet ontbinden in factoren, ook wel ‘buiten haakjes halen’ genoemd? Zoiets als $pq + pr$ wordt na ontbinding in factoren zoiets als $p(q + r)$, bijvoorbeeld. Welnu, dat kunnen we natuurlijk ook voor onze twee termen hierboven doen, alleen halen we hier $(-b)$ buiten haakjes:

$$(-a)(-b) = (-b)((-a) + a) + ab.$$

Mooi. Kijk nou toch eens naar die mooie expressie tussen de grotere haakjes. Ik vind het superaantrekkelijk, want, inderdaad, het is gelijk aan 0. En alles dat wordt vermenigvuldigd met 0 is 0. Dus, wat we overhouden, is:

$$(-a)(-b) = +ab.$$

Cheers.